

Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung Institut fédéral pour l'étude de la neige et des avalanches Istituto federale per lo studio della neve e delle valanghe

Weissfluhjoch-Davos

Interner Bericht Nr.584

Modellrechnungen zu den Spannungsverteilungen in der Schneedecke verursacht durch Skifahrer und Pistenfahrzeuge

Der Direktor:

i.A. W.Good

Der Autor:

T.Stocker

Thomas Stockes

Weissfluhjoch/Davos, den 7.Juli 1980 /mb

1. Einleitung

Als temporärer Mitarbeiter in der Sektion I des EISLF vom Mai 1980 bis Juli 1980 beschäftigte ich mich während meines Aufenthaltes auf dem Weissfluhjoch mit diversen Auswertearbeiten.

Da nun eine zusammenfassende Betrachtung aus den Winterberichten ergeben hat, dass allzu oft Skifahrer und in zunehmendem Masse auch Pistenfahrzeuge als Verursacher betroffen werden, wollten wir einmal theoretisch zeigen, auf welche Weise diese Zusatzgewichte die Schneedecke belasten.

Bei Stabilitätsberechnungen der Schneedecke sind diese Ergebnisse von Wichtigkeit.

2. Allgemeines

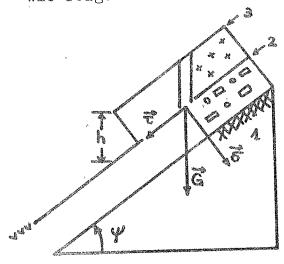
Eine Schneedecke ist <u>instabil</u>, falls die in der Schneedecke auftretenden <u>Spannungen</u> die <u>Festigkeiten</u> überschreiten, so dass die Kohäsior zwischen den Schneekörnernüberwunden wird. Dabei kann es unter ungünstigen Bedingungen (Gelände, Aufbau der Schneedecke) zu einem Abgleiten eines Teiles der Schneedecke kommen.

Das Verhältnis Festigkeit zu Spannung kann nun auf zwei Arten ungünstig verschoben werden:

a) Die Festigkeit ändert zeitabhängig. Das ist ein Vorgang, der von der internen Umwandlung (Aufbau/Abbau) der Schneedecke abhängt. Diesen qualitativ wie quantitativ zu erfassen ist sehr schwierig, da es sich einerseits um einen Ablauf handelt, der von unüberschaubar vielen Parametern abhängt und andererseits kaum Messresultate vorhanden sind.

b) Die Spannung nimmt zu. Es drängt sich nun eine genaue Definition der Spannung auf. Wir verstehen darunter die hangparallele Komponente einer Kraft, bezogen auf eine Einheitsfläche, die auf oder in der Schneedecke wirkt. Diese Kraft ist offensichtlich zusammengesetzt aus dem Gewicht der Schneedecke selbst und einer allfälligen Zusatzlast (Skifahrer, Pistenfahrzeug).

Bei sehr vereinfachten Bedingungen berechnet sich die Spannung wie folgt:



1: Boden

2: betrachtete Schicht (z.B. V)

3: Schneeoberfläche

Fig.1

$$\tau = -(h \cos \psi) \cdot \gamma \cdot \sin \psi = -\frac{1}{2}h\gamma \sin 2\psi$$
Druck lotrecht

wobei: h: Höhe der Ueberlagerung

ψ: Neigungswinkel

γ: spezifische Gewichtskraft der Ueberlagerung

Man sieht nun, dass die Erhöhung der Spannung, die durch die Schneedecke selbst verursacht wird, durch Neuschneefall, durch Setzung und somit Verdichtung oder durch das Gelände erfolgen kann.

Die Beschränkung auf die hangparallele Komponente kann deshalb geschehen, weil von den verschiedenen Festigkeiten die Scherfestig keit die geringste ist. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf Scherspannungen!

3. Voraussetzungen

3.1 Normskifahrer und Normpistenfahrzeug

a) Skifahrer:

Der Skifahrer verteilt sein Gewicht auf eine Fläche. Wir vereinfachen nun dahingehend, dass wir sagen:

- 1. Die Gewichtsverteilung ist homogen. Der Druck unter der Skibindung sei also gleich gross wie der Druck an den Skienden.
- 2. Der Skifahrer steht auf einer Platte, die einfach gerade die Breite der beiden Skier zusammen aufweist.

Das Normgewicht sei 85 kg G_{ski} = 85 kg (Gewichts-kilogramm)

Die Normskibreite sei 20 cm G_{ski} = 2 dm

Die Normskilänge sei 170 cm G_{ski} = 17 dm

Das ergibt, wenn der Skifahrer entlang einer Höhenkurve fährt, eine spezifische Linienlast $\frac{G}{I}$ = R = 5 $\frac{kg}{dm}$.

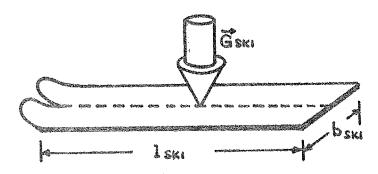


Fig. 2

Die Masse der Skiausrüstung (7-10 kg) ist in Gski inbegriffen.

b) Pistenfahrzeug:

Das Pistenfahrzeug wird ohne Zusatzbelastungen wie Pflug, Walzen oder Teppich betrachtet. Die Gewichtsverteilung sei wiederum homogen. Die Raupeneffekte müssen wir vernachlässigen. Die Raupen bilden eine zusammenhängende Auflagefläche, was demnach eine reduzierte Fahrzeugbreite ergibt. Das Fahrzeug soll senkrecht zu den Höhenlinien fahren.

G_{Ratrac} = 5500 kg

 $b_{Ratrac} = 42 dm$ $b_{red} = 33 dm$

 $l_{Ratrac} = 32 dm$

spez. Linienlast $\frac{G}{b_{red}} = R = 166 \frac{kg}{dm}$

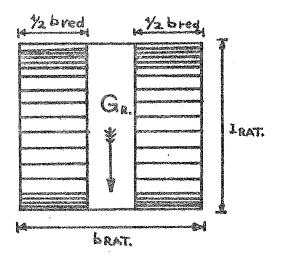


Fig.3

Die Angaben stammen von der Firma Rolba. Sie beziehen sich auf den häufig verkauften Typ "Ratrac Hydro-Turbo", der schon seit 1976 im Einsatz ist.

3.2 Idealisierungen

Die Belastung einer Schneedecke, die kompressibel ist, ist ein sehr komplizierter Vorgang, den wir nicht erfassen konnten. Wir nehmen an, dass die Situation erst nach einer gewissen Zeit betrachtet wird. Die Schneedecke hat sich in dieser Zeit senken können und ist jetzt momentan in makroskopischer Ruhe. Die Schneedecke sei oberhalb der betrachteten Schicht homogen aufgebaut, so dass im folgenden die Grundformeln angewendet

werden können. Die Schneedecke soll also ihre mechanischen Eigenschaften in einer geeigneten Zeitspanne nicht mehr ändern. Die Grössenordnung liegt dabei bei wenigen Sekunden, da wir ja unsere Ergebnisse auf die Vorgänge unmittelbar vor einer Lawinenauslösung anwenden wollen.

4. Berechnungen

4.1 Linienlast

Grundformeln aus Föppl "Drang und Zwang", Teil III

a)

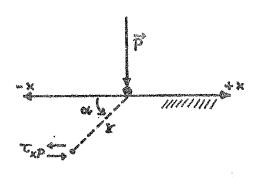


Fig.4

Es handelt sich um eine Gerade, die in Richtung senkrecht zur Blattebene unendliche Ausdehnung habe und eine spezifische Last P (Kraft pro Einheitslänge) aufweise. Im homogenen Material existiert nun eine Spannungsweitergabe folgendermassen:

$$\tau_{\rm XP} = -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$
 $r>0$

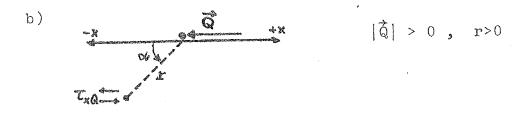


Fig.5

$$\tau_{xQ} = -\frac{2Q}{\pi r} \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

Q. stellt wieder eine spezifische Längenlast dar.

c) Superposition

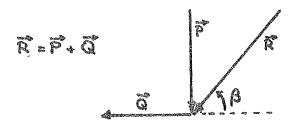


Fig. 6

$$\tau_{\overline{\text{TOT}}} = -\frac{2}{\pi r} (P \sin^2 \alpha \cos \alpha + Q \cos^2 \alpha \sin \alpha)$$

Es gilt offenbar:
$$Q = R \cos \beta$$

 $P = R \sin \beta$ $|\vec{R}| > 0$

Gefährlich ist das Vorzeichen von Q, es wechselt bei β = 90°. Da aber im folgenden auf der schiefen Ebene nur lotrechte Ursachkräfte vorkommen, bleibt β < 90° und somit treten keine Vorzeichenprobleme auf.

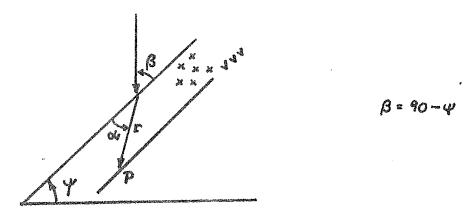
$$\tau_{\text{TOT}} = -\frac{2}{\pi r} (\text{R sin}\beta \text{ sin}^2\alpha \cos\alpha + \text{R cos}\beta \cos^2\alpha \sin\alpha)$$

$$\tau_{TOT} = -\frac{2R}{\pi r} \cos \alpha \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)$$
 Schubspannung

4.2 Flächenlast

Der Uebergang von der Spannungsverteilung durch Linienlast zu derjenigen durch Flächenlast erfolgt durch Integration, indem die Auflagefläche in infinitesimale Streifen der Breite dx aufgeteilt wird, welche als Linien angenommen werden. Dabei habe die Auflagefläche wiederum in Richtung senkrecht zur Blattebene unendliche Ausdehnung.

Linienlast auf die Schneedecke bezogen:



P: betrachteter Ort in der Schicht

Fig.7

$$\tau(P) = -\frac{2R}{\pi r} \cos\alpha \sin\alpha \cos(\alpha - (90 - \psi))$$

$$\tau(P) = -\frac{2R}{\pi r} \cos\alpha \sin\alpha \sin(\alpha + \psi) = -\frac{R}{\pi r} \sin2\alpha \sin(\alpha + \psi)$$

Das Koordinatensystem wählen wir wie folgt:

x-Achse: liegt auf der Schneeoberfläche senkrecht zu

den Höhenkurven, positiv hangaufwärts

y-Achse: senkrecht zur x-Achse in der Blattebene, positiv

in die Schneedecke

Das System ist linksorientiert; das ist aber belanglos.

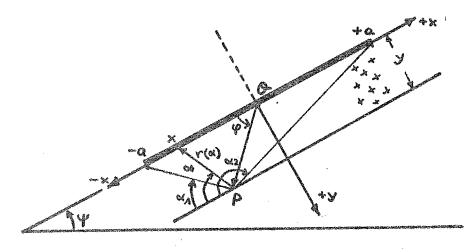


Fig.8

 ψ : Hangneigung in Grad

ta : Plattenbegrenzung bezüglich der x-Achse

(a ist die halbe Plattenlänge)

x : betrachteter Ort in der Platte

φ,y : Charakterisierung der Lage von P, 0 ≤ φ ≦ 180

y : Ort der betrachteten Schicht, Mächtigkeit der

Ueberlagerung (y>0)

 α_{1}, α_{2} : Ein Beobachter in P sieht die Plattenenden unter

den Grenzwinkeln α_1 und α_2

 $r(\alpha)$: Abstand (P, betrachteter Punkt auf der Platte)

α : zu x gehöriger Winkel von P aus

Die infinitesimale Spannung $d\tau$, gemessen in P, verursacht durch einen Streifen der Breite dx am Ort x, ist gegeben durch:

(1)
$$d\tau = -\frac{dR}{\pi r} \sin 2(180-\alpha) \sin(180-\alpha+\psi)$$

(2)
$$dR = R \frac{dx}{2a}$$

(4)
$$r = \frac{y}{\sin \alpha}$$

(5)
$$\implies$$
 $d\tau = \frac{Rdx}{\pi ay} \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin(\alpha - \psi)$

x ist nun eine Funktion von α , y und ϕ :

(6)
$$x = -\frac{y}{\tan \phi} - \frac{y}{\tan \alpha}$$
, wobei der erste Summand bei festem P konstant ist.

Da wir bezüglich α integrieren, muss dx ersetzt werden.

(6) nach α abgeleitet:

$$\frac{dx}{d\alpha} = 0 - \left(-\frac{y}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{y}{\sin^2\alpha}$$

$$dx = \frac{y}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$
 in (5) eingesetzt ergibt:

(7)
$$d\tau = \frac{Rd\alpha}{\pi a} \cos\alpha \sin(\alpha - \psi)$$

Die Integration kann nun durchgeführt werden:

$$\tau(P) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\tau = \frac{R}{\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \sin(\alpha - \psi) d\alpha$$

$$\tau(P) = \frac{R}{\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \ (\sin\alpha \ \cos\psi - \cos\alpha \ \sin\psi) \ d\alpha$$

$$\tau(P) = \frac{R}{\pi a} \left(\cos\psi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, d\alpha - \sin\psi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2\alpha \, d\alpha\right)$$

(8)
$$\tau(P) = \frac{R}{\pi a} (\cos \psi (-\frac{1}{4}\cos 2\alpha)) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \sin \psi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \alpha d\alpha \Big)$$

$$\int \cos^2 \alpha \ d\alpha = \sin \alpha \ \cos \alpha + \int \sin^2 \alpha \ d\alpha$$
 (partielle Integration)
= $\sin \alpha \ \cos \alpha + \int (1-\cos^2 \alpha) \ d\alpha$

=
$$\alpha$$
 + $\sin \alpha \cos \alpha \sim \int \cos^2 \alpha \ d\alpha$

$$\implies \int \cos^2 \alpha \ d\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) + c$$
 in (8) eingesetzt ergibt:

$$\tau(P) = \frac{R}{\pi a} \left(\frac{1}{4} \cos \psi \left(\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2 \right) - \frac{1}{4} \sin \psi \left(2\alpha_2 - 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1 \right) \right)$$

$$= \frac{R}{4\pi a} \left(\cos\psi \cos 2\alpha_1 + \sin\psi \sin 2\alpha_1 - \cos\psi \cos 2\alpha_2 - \sin\psi \sin 2\alpha_2 + 2\sin\psi (\alpha_1 - \alpha_2)\right)$$

$$\tau(P) = \frac{R}{4\pi a} \left(\cos(2\alpha_1 - \psi) - \cos(2\alpha_2 - \psi) + 2\sin\psi \left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\right)$$

α; sind im Bogenmass einzusetzen.

Die funktionale Abhängigkeit von τ von P ist noch nicht ersichtlich. Sie kommt bei der Berechnung der Grenzwinkel in Erscheinung.

Berechnung der Grenzwinkel α_1 , α_2 :

Dabei können wir einfach Gleichung (6) benützen, indem wir x als $\pm a$ setzen und α als α_1 oder α_2 . (Fig.8) Das ergibt:

$$-\frac{y}{\tan\phi} - \frac{y}{\tan\alpha_1} = -a \qquad -\frac{y}{\tan\phi} - \frac{y}{\tan\alpha_2} = +a$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{y}{a - \frac{y}{\tan \phi}} \qquad (10) \qquad \tan \alpha_2 = \frac{-y}{a + \frac{y}{\tan \phi}}$$

für α_i gilt $0 \le \alpha_i \le 180$

Tangens ist im Intervall]0,180[\ {90} eindeutig umkehrbar.

 \Longrightarrow] ein Punkt P, wo $\tau(P)$ ein absolutes Maximum annimmt. Dieser Punkt bzw. das zugehörige ϕ zu bestimmen, ist algebraisch nicht möglich, da man transzendente Gleichungen erhält! Diese Punkte maximaler Spannung in Abhängigkeit von y und ϕ sind aus den graphischen Darstellungen in Kapitel 5 ersichtlich.

Mit den Gleichungen (9) und (10) lässt sich also leicht die hangparallele Komponente der Spannung einer Flächenlast an jedem beliebigen Punkt (0 $\leq \phi \leq 180$ und y>0) in der Schneedecke berechnen.

Von einer Darstellung der Masseinheiten im SI wurde abgesehen. Die Angaben in kg und dm decken sich mit der Erfahrung besser.

5. Resultate und graphische Darstellungen

Zur numerischen Berechnung sind wir von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

- a) Pistenfahrzeug: Es fahre senkrecht zu den Höhenkurven. Daher ergibt das eine spezifische Linienlast $R = \frac{G}{bred} = 166 \text{ kg/dm}.$ a stellt somit in der Formel die halbe Ratraclänge (16 dm) dar.
- b) Skifahrer: Er "schneide einen Hang an", d.h. er fährt längs einer Höhenkurve. Das ergibt also eine spezifische Linienlast von $R = \frac{G}{T} = 5 \text{ kg/dm}$.

Fig. 9, 10, 11:

Wir sehen, dass das Pistenfahrzeug wesentliche Randkräfte in der Schneedecke verursacht. Diese sprunghaften Spannungsänderungen können eine schwache Zwischenschicht erheblich mehr beanspruchen als dies durch den blossen Flächendruck allein schon passiert.

Wenn wir die Ratracbelastung mit der Skifahrerbelastung vergleichen, so stellen wir zwei Tatsachen fest:

Der Ratrac deckt eine viel grössere Zone ab. Die durchschnittliche Scherspannung ist in geringen Tiefen (2 dm) etwa um den Faktor 4 bei ψ = 25°, Faktor 5 bei 37° und Faktor 6 bei 45° grösser. Das Pistenfahrzeug wird also bei steilerem Gelände erheblich gefährlicher. Ebenfalls ist durch die grosse Abdeckfläche die Wahrscheinlichkeit grösser, in einer bestimmten Schicht eine schwache Stelle (Ort geringer Scherfestigkeit) zu treffen. Zweitens: Die Wirkung lässt sich beim Pistenfahrzeug auch viel tiefer verfolgen -selbst ohne Berücksichtigung des Fahrvorganges.

Beachtet man die Verhältnisse in einer Tiefe von 60 cm, so erhält man zur Skifahrerspannung Faktoren von 6 bei ψ = 25° bis zu 10 bei 45°.

Fig.12, 13, 14:

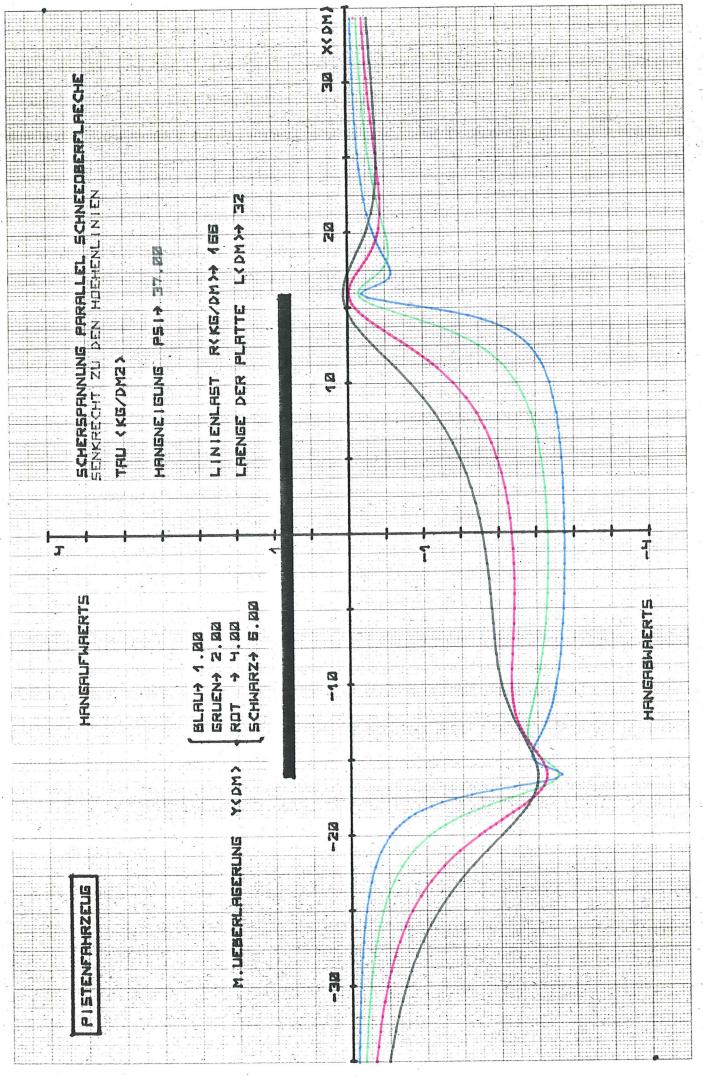
Besonderes Merkmal des Skifahrers ist, dass er eine eigentlich betragsmässig kleine Zusatzlast aufbringt. Auch die Wirkung in der Tiefe gesehen ist minim. Was jedoch gefährlich ist, ist die Tatsache, dass er die Schneedecke bis in tiefere Schichten sozusagen auseinanderschiebt. Innerhalb von 20 cm wechselt die Scherspannung sprunghaft. Besonders ausgeprägt ist das bei ψ = 25°. Wohl bewegt sich also die betragsmässige Belastung eher in Schranken, die Wirkung ist aber zweifellos verheerend durch diese Einkerbung.

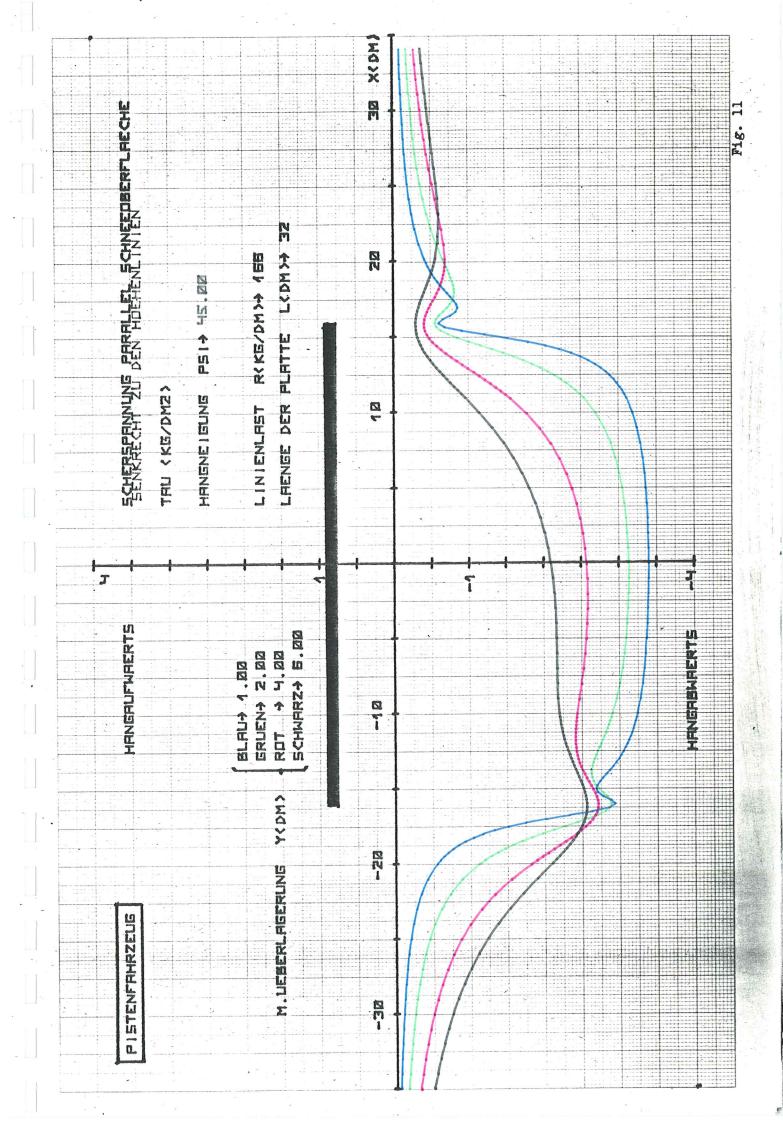
Es ist ebenfalls klar, dass der Skifahrer praktisch keine Flächenwirkung zustande bringt.

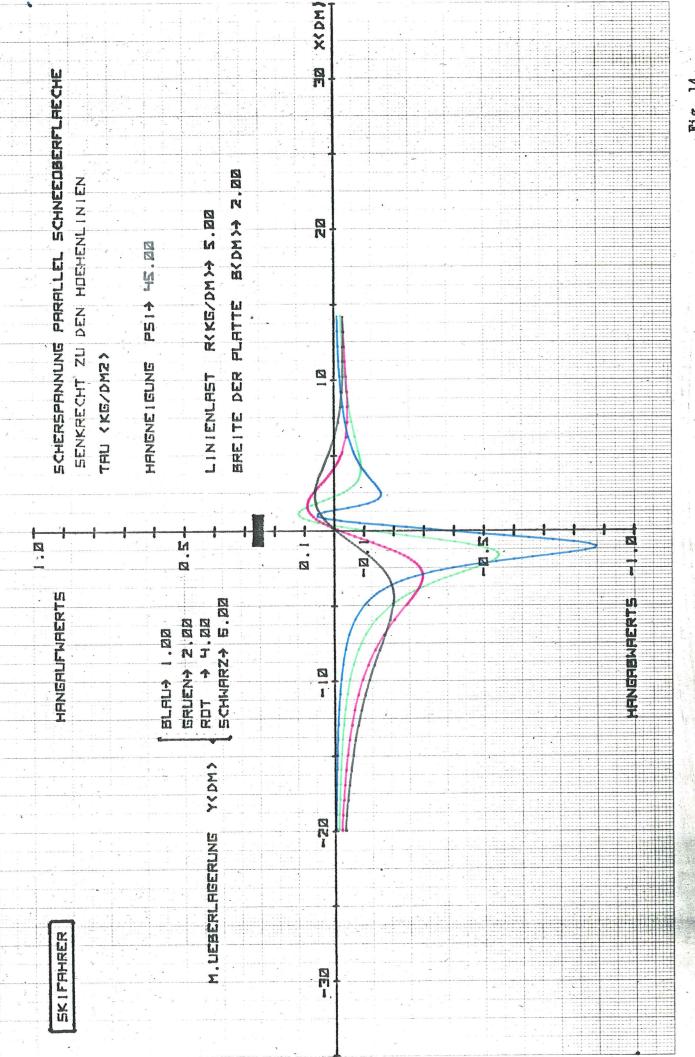
Fig.15-20:

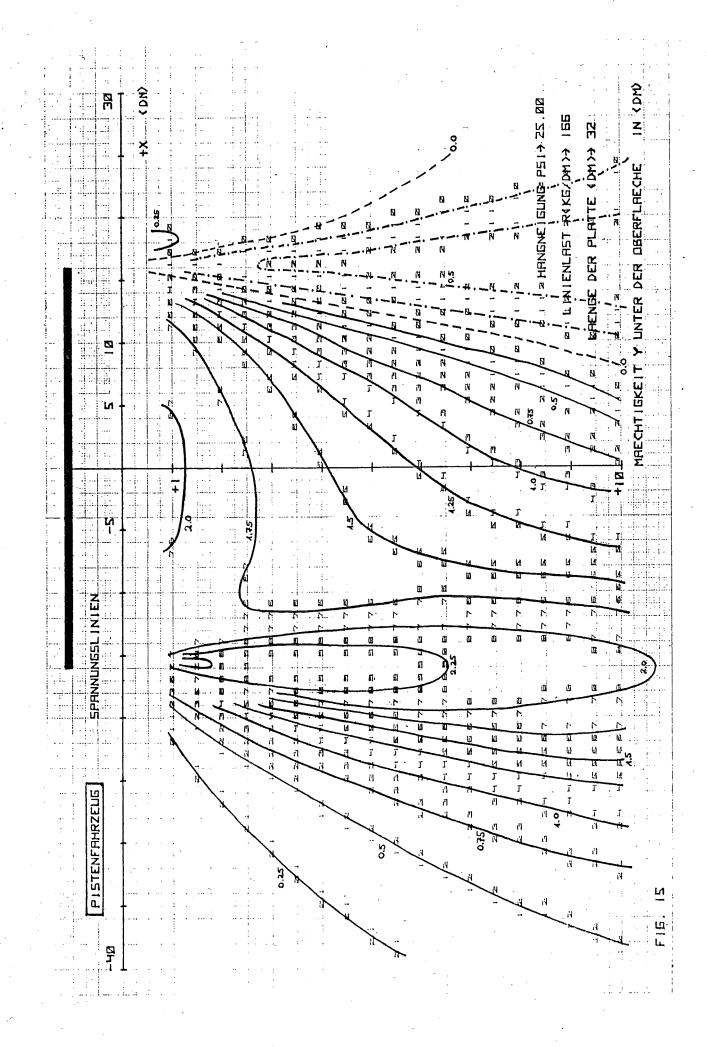
Diese zeigen noch einmal deutlich die Ergebnisse der vorherigen Darstellungen. Wir können nun den Spannungszustand in der ganzen Schneedecke überblicken.

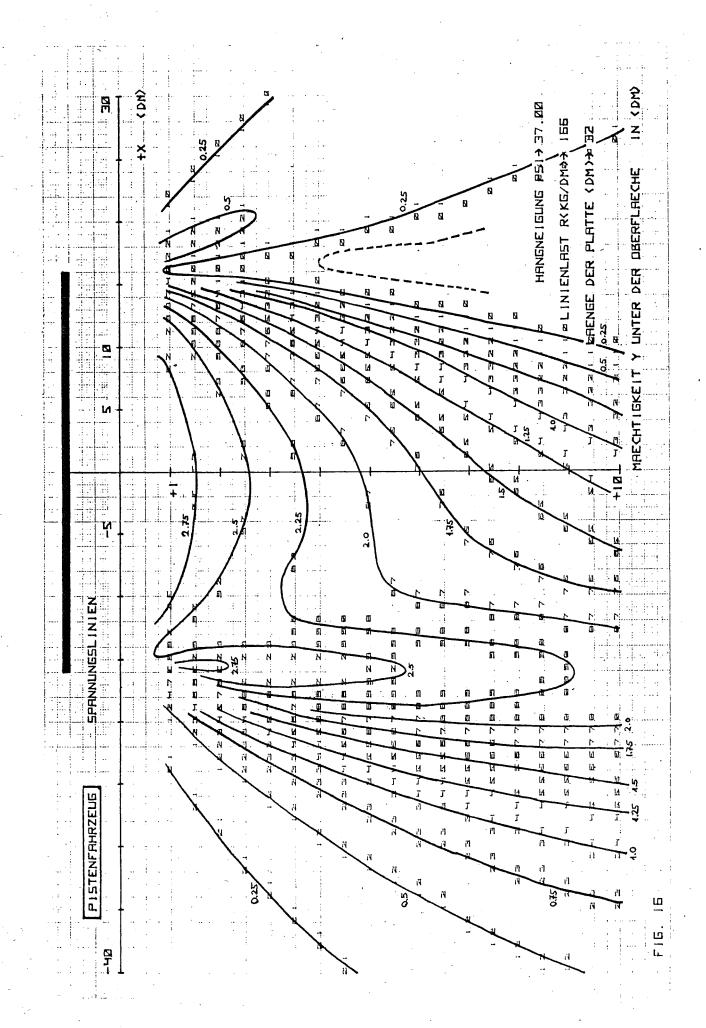
Die --- Linie zeigt Vorzeichenwechsel der Scherspannung an. --- kennzeichnen die Spannungslinien der Scherspannungen mit positivem Vorzeichen. Die Zahlen bezeichnen die Werte für τ in kg/dm².

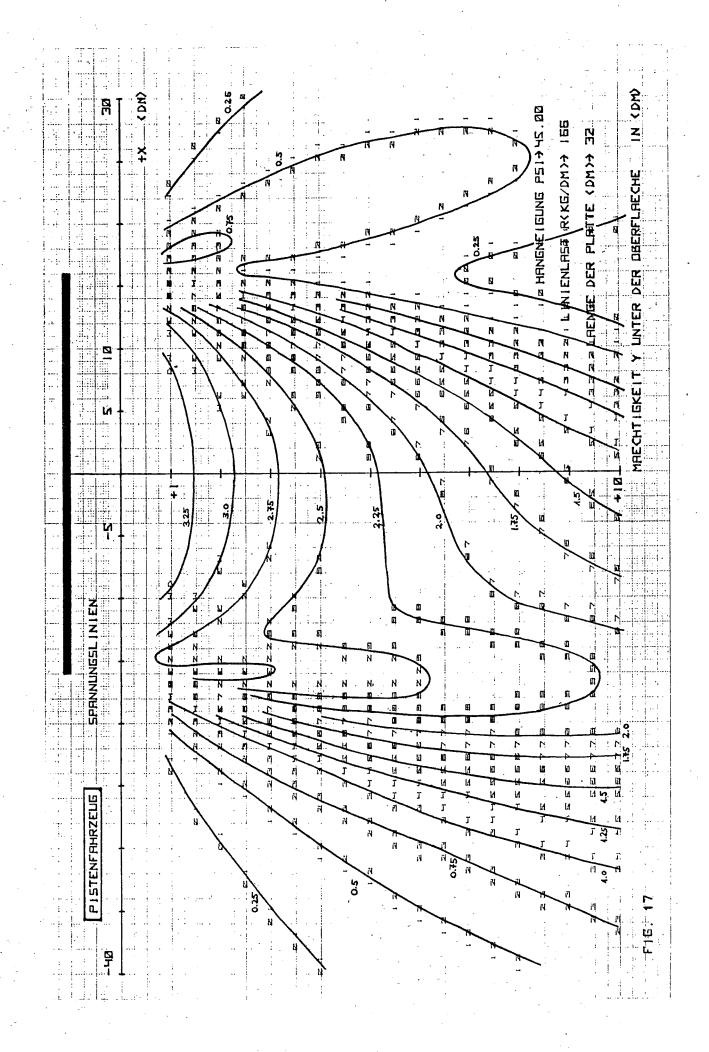


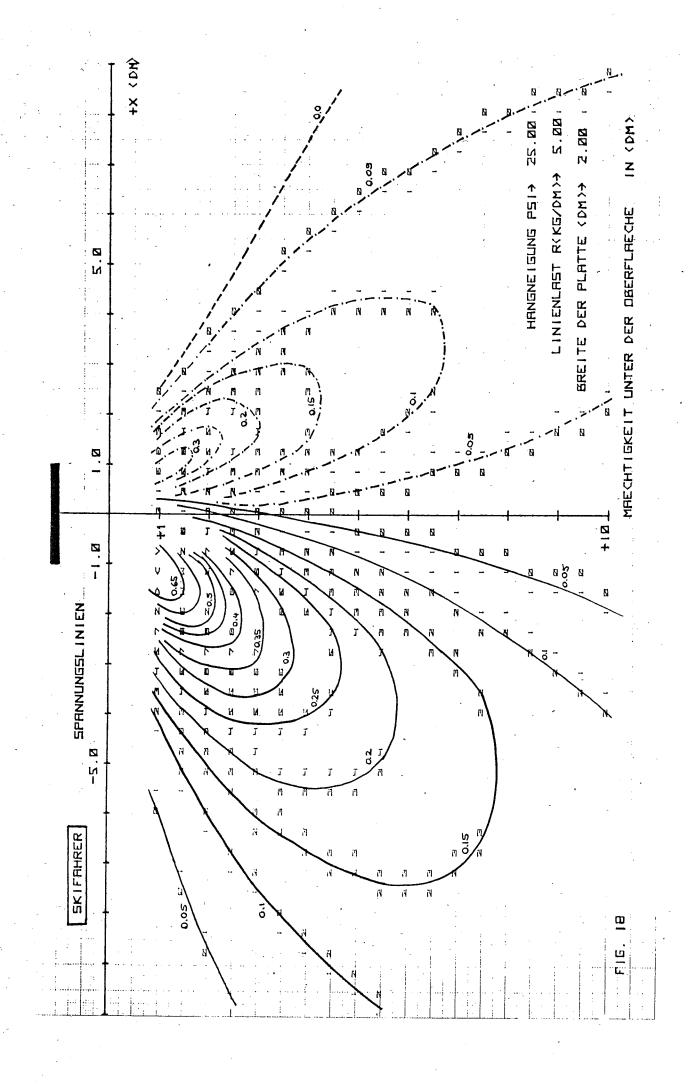


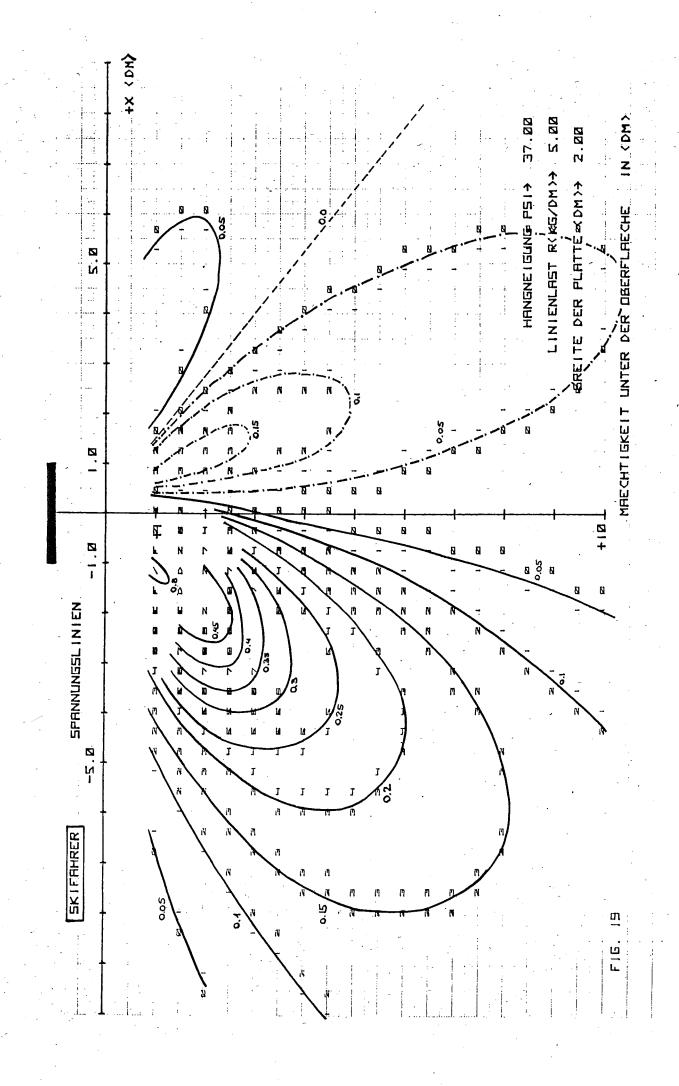


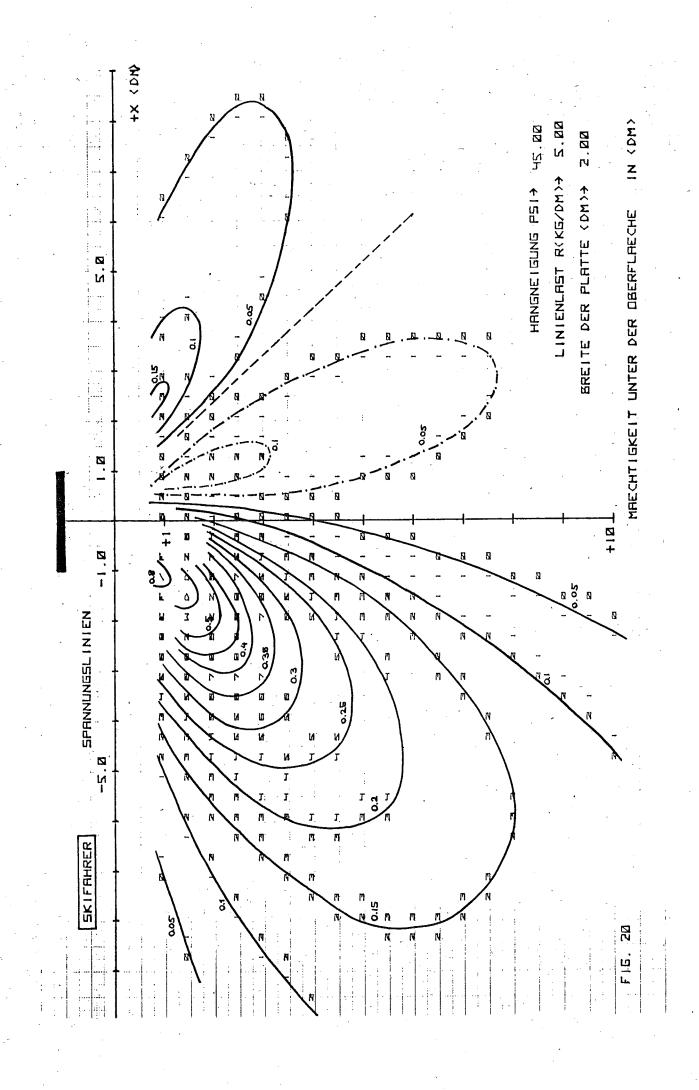












6. Folgerungen

Aus den graphischen Darstellungen ist ersichtlich, dass es 3 Hauptpunkte gibt, die eine Schneedecke ungünstig belasten:

- hohe durchschnittliche Spannungen
- ungünstige Randkraftspitzen
- schnelle Aenderungen der Belastungsspannungen bezüglich Betrachtungsort

Bei Stabilitäsbetrachtungen der belasteten Schneedecke genügt es also nicht mehr, nur den Druck eines Skifahrers oder Pistenfahrzeuges in Betracht zu ziehen. Besonders wenn man "worst case" Ueberlegungen anstellt, sind Ueberlagerungshöhen und Randkräfte speziell zu beachten.

In einer weitergehenden Arbeit könnte man nun das Problem dreidimensional behandeln und so die Idealisierung der eindimensional unendlichen Platte wegschaffen.

Schon aufgrund der nun vorliegenden Resultate können die Gefahren von Pistenfahrzeugen besser erfasst und anschaulich gemacht werden.

7. Literatur

Föppl, "Drang und Zwang", Teil III, S.26ff

8. Verdankungen

Herzlich Danke schön möchte ich Herrn Paul Föhn sagen, der mich in die ganze Schneematerie eingeführt hat, und mit dem ich alle auftauchenden Probleme ausführlich diskutieren konnte. Vielen Dank auch an Frl. Martine Barth für ihre rassige Reinschrift.