

Einführung in die Klimamodellierung

Prof. T. Stocker
Physikalisches Institut
Universität Bern

WS 2004/2005
(korrigierte Fassung, 26.11.2004)

Inhalt

1	Einführung	1
1.1	Ziel der Vorlesung und weiterführende Literatur	1
1.2	Das Klimasystem	3
1.3	Aufgaben und Grenzen der Klimamodellierung.....	6
1.4	Historische Entwicklung	9
1.5	Einige aktuelle Beispiele zur Klimamodellierung	13
1.6	Zusammenfassung.....	17
2	Modellhierarchie und einfache Klimamodelle	19
2.1	Hierarchie der physikalischen Klimamodelle	19
2.2	Punktmodell der Strahlungsbilanz	27
2.3	Numerische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung	30
2.4	Klimasensitivität im Energiebilanzmodell.....	34
3	Advektion, Diffusion und Konvektion	41
3.1	Advektion.....	41
3.2	Diffusion	42
3.3	Konvektion.....	43
3.4	Advektions-Diffusionsgleichung und Kontinuitätsgleichung.....	44
3.5	Numerische Lösung der Advektions-Gleichung.....	45
3.6	Weitere Verfahren zur Lösung der Advektions-Gleichung	53
3.7	Numerische Lösung der Advektions-Diffusions Gleichung.....	59
3.8	Numerische Diffusion.....	59
4	Energietransport im Klimasystem und seine Parametrisierung	61
4.1	Grundlagen.....	61
4.2	Wärmetransport in der Atmosphäre	62
4.3	Breitenabhängiges Energiebilanzmodell	65
4.4	Wärmetransport im Ozean.....	66
5	Anfangswert- und Randwertprobleme	71
5.1	Allgemeine Grundlagen.....	71
5.2	Direkte numerische Lösung der Poissongleichung.....	72
5.3	Iterative Verfahren.....	74
5.4	Successive Overrelaxation (SOR).....	75
6	Gross-skalige Zirkulation im Ozean	77
6.1	Die Bewegungsgleichungen.....	77
6.2	Flachwassergleichungen als Spezialfall.....	80
6.3	Verschiedene Typen von Gittern in Klimamodellen	81
6.4	Spektralmodelle	85
6.5	Windgetriebene Strömung im Ozean (Stommel Modell)	87
6.6	Potentielle Vorticity: eine wichtige Erhaltungsgröße	93

7	Gross-skalige Zirkulation in der Atmosphäre	97
7.1	Zonale und meridionale Zirkulation.....	97
7.2	Das Lorenz-Saltzman Modell	102
8	Atmosphäre-Ozean Wechselwirkung	109
8.1	Kopplung von physikalischen Modellkomponenten.....	109
8.2	Thermische Randbedingungen	110
8.3	Hydrologische Randbedingungen.....	114
8.4	Impulsflüsse	116
8.5	Gemischte Randbedingungen.....	116
8.6	Gekoppelte Modelle.....	118
9	Multiple Gleichgewichte im Klimasystem.....	122
9.1	Abrupte Klimawechsel aufgezeichnet in polaren Eisbohrkernen.....	122
9.2	Die bipolare Klimaschaukel	124
9.3	Multiple Gleichgewichte in einem einfachen Atmosphärenmodell	127
9.4	Multiple Gleichgewichte in einem einfachen Ozeanmodell.....	128
9.5	Multiple Gleichgewichte in gekoppelten Modellen	130
9.6	Schlussbemerkungen und Ausblick	133
10	Übungsaufgaben zur Klimamodellierung	134

1. Einführung

1.1 Ziel der Vorlesung und weiterführende Literatur

Diese Vorlesung verfolgt drei *Hauptziele*:

1. eine Vorstellung der mathematisch-physikalischen Grundlagen verschiedener *Komponenten des Klimasystems* und die Herleitung von einfachen Differentialgleichungen, die wichtige Klimaprozesse beschreiben;
2. eine Einführung in die *numerische Lösung* von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen anhand von Beispielen in der Klimamodellierung;
3. die Erlernung und Anwendung von *Matlab* als mathematisch-numerisches Werkzeug.

Eine 2-stündige Vorlesung mit Übungen ist zu knapp bemessen, um diese Ziele zu erreichen. Durch ein bescheidenes zusätzliches Literaturstudium, inklusive www, und die praktische Anwendung in den Übungen sollte jedoch eine gute Basis für weitere Arbeiten, zum Beispiel im Rahmen einer Diplom- oder Doktorarbeit, gelegt sein.

In der Einführung wird auch auf die gesellschaftliche Bedeutung der Klimaforschung, und insbesondere der Klimamodellierung hingewiesen. Es sind einzig Klimamodelle unterschiedlicher Komplexität, die quantitative Abschätzungen der Grösse künftiger Klimaveränderungen erlauben. Diese Modelle, die auf den Grundgesetzen der Physik und Chemie (Erhaltung der Energie, Masse, Impuls, etc.) beruhen, dienen heute als Instrumente in der politischen und gesellschaftlichen Entscheidungsfindung. Wenn zum Beispiel die Auswirkung einer Verdopplung des Gehaltes von CO₂ in der Atmosphäre, wie sie etwa im Jahr 2050 erwartet wird, abgeschätzt werden soll, so sind Klimamodelle die einzigen Instrumente, die zur Beantwortung dieser Frage beitragen können.

Klimamodelle vereinigen Erkenntnisse aus verschiedenen Bereichen der Naturwissenschaften. Bei der Modellbildung ist das Verständnis der dynamischen Prozesse in der Atmosphäre und im Ozean unabdingbar. Dabei spielt Fluidodynamik in einem rotierenden Bezugssystem (*geophysical fluid dynamics*) eine herausragende Rolle. Die entstehenden partiellen Differentialgleichungen müssen mit Rechenverfahren gelöst werden: eine Aufgabe der numerischen Mathematik. Wie in jedem Modell der Naturvorgänge gibt es Prozesse, die nicht simuliert werden können, da sie auf Längen- oder Zeitskalen ablaufen, die dem Modell grundsätzlich nicht zugänglich sind. Dazu werden *Parametrisierungen* formuliert, die in dieser Vorlesung vorgestellt werden.

Es gibt einige nützliche Lehr- und Fachbücher zum Thema Klima und Klimamodellierung:

Peixoto J.P., Oort, A.H., 1992, *Physics of Climate*, American Institute of Physics, 520 p.

Sehr klare und ausführliche Einführung in die physikalischen Grundlagen des Klimasystems und seiner verschiedenen Komponenten (Atmosphäre, Ozean, Eis). Gute Darstellung der Klimatologien wichtiger Grössen. Aspekt der Klimamodellierung nur kurz behandelt.

Climate System Modeling, 1992, K.E. Trenberth (Editor), Cambridge University Press, 788 p.

Kohärente Sammlung von Übersichtsartikeln zur Modellierung des Klimasystems, besonders seiner einzelnen Komponenten, inklusive biogeochemische Kreisläufe, dargestellt in vier Teilen: grundlegende Prozesse, Modellierung und Parametrisierung, Kopplungen zwischen den einzelnen Systemen, und Anwendungen. Material zum Teil nicht mehr auf dem neuesten Stand.

McGuffie K., A. Henderson-Sellers, 1997, *A Climate Modelling Primer 2nd Edition*, John Wiley, 1997, 257 p. (3rd edition erscheint im Januar 2005)

Einführung in die Modellhierarchie und Formulierungen mit Beispielen und Programmen.

Washington W.M., C.L. Parkinson, 1986, *An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling*, Oxford University Press, 422 p.

Klare Darstellung der Physik der einzelnen Systemkomponenten, jedoch nicht so weitgehend wie Peixoto & Oort (1992), aber mehr auf Modellierung zugeschnitten. Viele Parametrisierungen werden erklärt. Klassiker, jedoch langsam überholt.

Ocean Circulation and Climate: Observing and Modelling the Global Ocean, 2001, G. Siedler, J. Church, J. Gould (Eds.), International Geophysics Series 77, Academic Press, 2001, 715 p.

Sehr gute Übersicht über den gegenwärtigen Wissensstand der Ozeanographie auf globaler Skala. Reich bebildert.

J. Houghton, 2002, *The Physics of Atmospheres, 3rd Ed.*, Cambridge University Press, 320 p.

Grundlegende Darstellung der Physik der Atmosphäre (Strahlung, Wolken, Zirkulation) mit aktueller Übersicht über Klimaänderungen, Klimamodelle und Vorhersagbarkeit.

D.L. Hartmann, 1994, *Global Physical Climatology*, Academic Press, 411 p. (2., erweiterte Auflage erscheint im Mai 2005).

Sehr klare und rigorose Einführung in die Physik von Ozean und Atmosphäre und physikalisch basierte Diskussion von Klimavariabilität und Klimaänderung.

Climate Change 2001: The Scientific Basis. Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. J.T. Houghton et al. (Eds.), Cambridge University Press, 881 p.

Umfassende Darstellung des Wissensstandes der Klimaforschung im Jahre 2001, bezüglich der Frage der Klimaveränderung. Die Dokumente sind zugänglich unter <http://www.ipcc.ch>

Hier einige Bücher über Grundlagen der numerischen Lösung von Problemen:

Schwarz, H.R., 2004, *Numerische Mathematik*, Teubner, 653 p.

Gute Einführung in die verschiedenen numerischen Methoden, Interpolation, Integration und Lösung partieller Differentialgleichungen. Viele durchgerechnete Beispiele.

Press W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, 1992, *Numerical Recipes, Second Edition*, Cambridge, 963 p.

Grosse Sammlung von numerischen Verfahren in verschiedenen Programmiersprachen. Verfahren werden kurz und prägnant erklärt mit vielen nützlichen Hinweisen auf deren gute und schlechte Eigenschaften. Gehört in die Bibliothek jedes Modellierers.

Krishnamurti T.N., L. Bounoua 1996, *An Introduction to Numerical Weather Prediction Techniques*. CRC Press, 304 p.

Ausführliche Beschreibung verschiedener Lösungstechniken und Parametrisierungen, die in atmosphärischen Zirkulationsmodellen verwendet werden.

MATLAB, The Student Edition, Version 5, Users Guide, 1997, Prentice Hall, 544 p.

Gute Einführung zum Einsteigen in Matlab. Zusammen mit dem ausgezeichneten help innerhalb von MATLAB kann bereits ein Niveau erreicht werden, auf dem die in der Vorlesung behandelten Probleme gelöst werden können.

1.2 Das Klimasystem

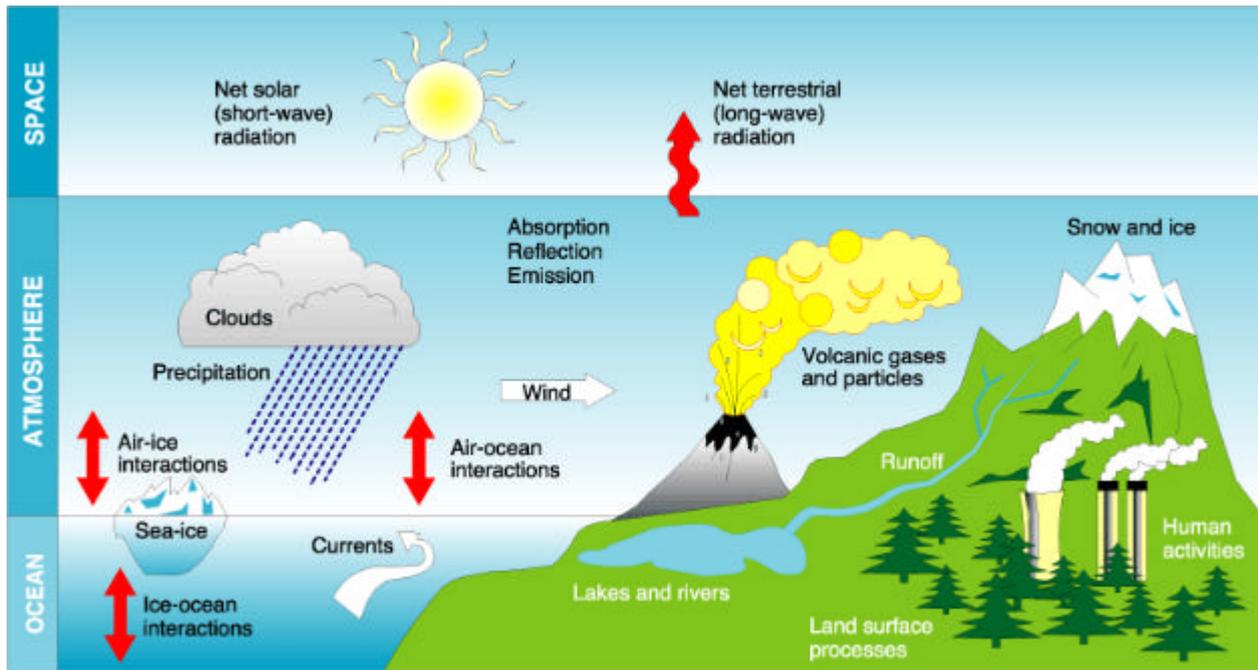
1.2.1 Komponenten des Klimasystems

Das Klimasystem besteht aus fünf Komponenten (Figur 1.1), die nachstehend, mit einigen der wichtigen Prozesse als Beispiele, aufgelistet sind:

1. *Atmosphäre*: Gasförmiger Bereich oberhalb der Erdoberfläche. Wettergeschehen, Strahlungsbilanz, Bildung von Wolken und Niederschlag, Strömung von Luftmassen, Reservoir von natürlichen und menschengemachten Spurengasen, Transport von Wärme, Wasserdampf, Spurenstoffen, Staub und Aerosolen;
2. *Hydrosphäre*: Sämtliche Formen von Wasser auf und unter der Oberfläche der Erde. Dies schliesst den gesamten Ozean und den globalen Wasserkreislauf ein, nachdem der Niederschlag die Erde erreicht hat. Globale Verteilung und Veränderung der Zuflüsse zu den verschiedenen Ozeanbecken, Strömung von Wassermassen, Transport von Wärme und Spurenstoffen im Ozean, Austausch von Wasserdampf und anderen Gasen zwischen Ozean und Atmosphäre, wichtigstes Reservoir von schnell mobilisierbarem Kohlenstoff;
3. *Cryosphäre*: Sämtliche Formen von Eis im Klimasystem, also Landeismassen, Eisschelfe, Meereis, Gletscher, und Permafrost. Langfristige Wasserreserven, Änderung der Strahlungsbilanz der Erdoberfläche, Beeinflussung des Salzgehaltes in kritischen Regionen der Weltmeere;
4. *Landoberfläche*: Feste Erde. Lage der Kontinente als bestimmender Faktor der Klimazonen und der Ozeanströmungen, Veränderung des Meeresspiegels, Umwandlung von kurz- in langwellige Strahlung, Reflektivität der Landoberfläche (Sand verschieden von Fels, oder anderen Formen), Reservoir von Staub;
5. *Biosphäre*: Organische Bedeckung der Landmassen (Vegetation, Boden) und marine Organismen. Bestimmt den Austausch von Kohlenstoff zwischen verschiedenen Reservoiren, und somit die Konzentration von CO₂ in der Atmosphäre, sowie die Budgets vieler anderer Gase, und damit auch die Strahlungsbilanz. Beeinflusst die Reflektivität der Oberfläche und damit die Strahlungsbilanz (z.B. Tundra verschieden von Steppe), reguliert den Wasserdampftransfer Boden-Atmosphäre, und via die Rauigkeit, Impulsübertrag Atmosphäre-Erde.

Eine sechste Komponente, die besonders für die Abschätzung künftiger Veränderungen relevant ist, wird oft ebenfalls als Teil des Klimasystems berücksichtigt: die *Anthroposphäre* (ανθρωπος = Mensch), das heisst diejenigen Prozesse, die durch den Menschen verursacht oder beeinflusst werden. Dabei sind die Emission von Substanzen, die die Strahlungsbilanz verändern, und die Veränderung der Landnutzung (Abholzung, Versteppung, Versiegelung) die wichtigsten.

Die meisten Klimamodelle behandeln Prozesse und Flüsse der Anthroposphäre als extern, das heisst, es werden in den Modellen beispielsweise die atmosphärischen Konzentrationen von CO₂, oder alternativ, die Emissionen vorgeschrieben. Ebenfalls werden die Staub- und Schwefel-emissionen, die von Vulkanen erzeugt werden, als externe Mechanismen vorgeschrieben: in der Vergangenheit aufgrund von bekannten Aufzeichnungen und paläoklimatischen Informationen von Vulkanausbrüchen, in der Zukunft aufgrund von gewählten Statistiken von solchen Ereignissen.



Figur 1.1: Die wichtigsten Komponenten des Klimasystems auf globaler Skala (Figur von IPCC, 2001).

Ein vollständiges Klimamodell enthält physikalische Beschreibungen aller 5 oben beschriebener Komponenten und berücksichtigt ebenfalls ihre Kopplung. Dabei können einzelne oder mehrere Komponenten in vereinfachter Form dargestellt, oder sogar fest vorgeschrieben werden.

Nicht jede Fragestellung in der Klimaforschung erfordert ein Modell, das alle Komponenten berücksichtigt. Es ist Teil der wissenschaftlichen Arbeit, die geeignete Modellzusammensetzung und die Komplexität zu wählen, so dass *robuste Resultate* erzeugt werden.

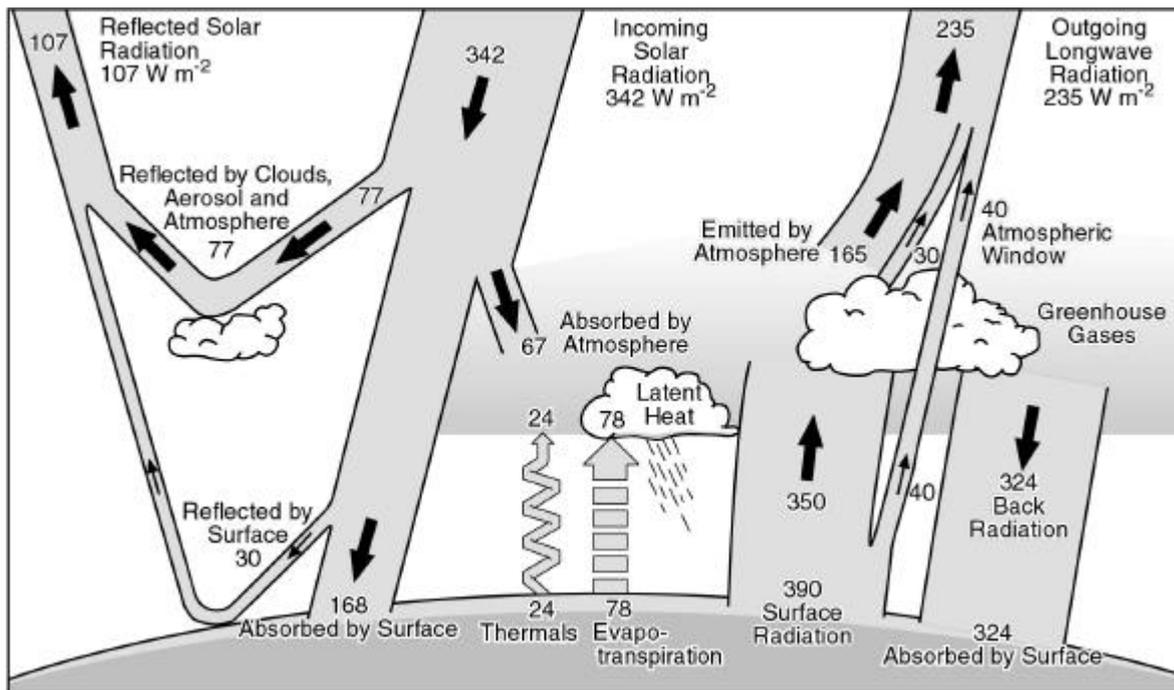
Jede Klimasystemkomponente umfasst einen Bereich charakteristischer Zeit- und Längenskalen. Die Kenntnis dieser Skalen ist notwendig zur korrekten Formulierung von Klimamodellen. In Tabelle 1.1 sind einige relevante Skalen zusammengefasst. Durch die Festlegung von Prozessen, die von einem bestimmten Modell beschrieben werden sollen, ergibt sich meist die benötigte räumliche und zeitliche Auflösung des Modellgitters.

1.2.2 Globale Strahlungsbilanz des Klimasystems

Die Sonne ist die einzig relevante Energiequelle für das Klimasystem auf Zeitskalen von weniger als etwa 10^7 Jahren. Die verschiedenen Energieflüsse sind in Figur 1.2 dargestellt. Von der Sonne gelangen ca. 342 W/m^2 (ein Viertel der solaren Energieflussdichte, Solarkonstante = 1368 W/m^2) an den Oberrand der Atmosphäre, wovon nur knapp die Hälfte zur direkten Erwärmung der Oberfläche zur Verfügung steht. Wichtige Anteile der kurzwelligigen Strahlung werden an Wolken, und an der Oberfläche direkt reflektiert, bzw. von der Atmosphäre absorbiert. Dem steht eine Ausstrahlung im langwelligen Bereich von 390 W/m^2 gegenüber. Durch Konvektion und Verdunstung verliert die Oberfläche zusätzlich noch ca. 100 W/m^2 , was scheinbar zu einer negativen Energiebilanz an der Oberfläche führt.

Komponente des Klimasystems	Prozess	charakteristische Zeitskala	charakteristische Längenskala
<i>Atmosphäre</i>	Kollision von Tröpfchen bei Wolkenbildung	$10^{-6} - 10^{-3}$ s	10^{-6} m
	Bildung von Konvektionszellen	$10^4 - 10^5$ s	$10^2 - 10^4$ m
	Entwicklung von Wettersystemen	$10^4 - 10^5$ s	$10^6 - 10^7$ m
	Persistenz von Drucklagen	10^6 s	$10^6 - 10^7$ m
	Southern Oscillation	10^7 s	10^7 m
	Troposphäre-Stratosphären Austausch	$10^7 - 10^8$ s	global
<i>Hydrosphäre</i>	Gasaustausch Atmosphäre-Ozean	$10^{-3} - 10^6$ s	$10^{-6} - 10^3$ m
	Tiefenwasserbildung	$10^4 - 10^6$ s	$10^4 - 10^5$ m
	Mesoskalige Ozeanwirbel	$10^6 - 10^7$ s	$10^4 - 10^5$ m
	Ausbreitung von Rossbywellen	10^7 s	10^7 m
	El Niño	$10^7 - 10^8$ s	10^7 m
	Erneuerungsrate des tiefen Wassers	$10^9 - 10^{10}$ s	global
<i>Cryosphäre</i>	Bildung von Permafrost	$10^7 - 10^9$ s	$1 - 10^6$ m
	Bildung von Meereis	$10^7 - 10^8$ s	$1 - 10^6$ m
	Landeismassen	$10^8 - 10^{11}$ s	$10^2 - 10^7$ m
<i>Landoberfläche</i>	Veränderung der Reflektivität	$10^7 - 10^8$ s	10^2 m – global
	Isostatischer Ausgleich der Kruste durch überlagerte Eismassen	$10^8 - 10^{11}$ s	10^6 m – global
<i>Biosphäre</i>	Austausch von Kohlenstoff mit der Atmosphäre	$10^4 - 10^8$ s	10^{-3} – global
	Aufbau und Abbau von Vegetationszonen	$10^9 - 10^{10}$ s	$10^2 - 10^7$ m

Tabelle 1.1: Einige Beispiele von klimabestimmenden Prozessen mit den Größenordnungen ihrer charakteristischen Zeit- und Längenskalen.



Figur 1.2: Globale Energieflüsse aus verschiedenen Quellen, die die Strahlungsbilanz der Erde beeinflussen. (Figur von IPCC, 2001).

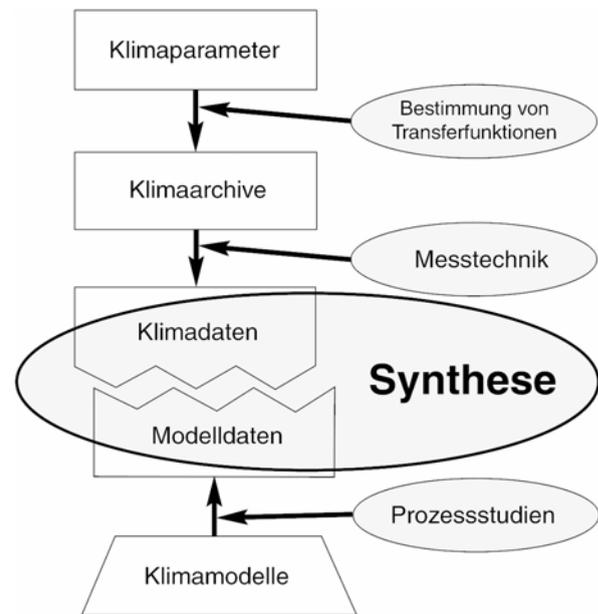
Durch den *natürlichen Treibhauseffekt*, verursacht durch Wasserdampf und Treibhausgase wie CO_2 , CH_4 , N_2O und weitere Spurengase, gelangen durch infrarote Rückstrahlung wiederum etwa 324 W m^{-2} auf die Erde. Damit wird das Gleichgewicht der Energiebilanz erreicht, und es stellt sich eine mittlere Oberflächentemperatur von ca. 14°C ein.

1.3 Aufgaben und Grenzen der Klimamodellierung

Die Klimaforschung war bis ca. 1960 ausschliesslich beschreibende Wissenschaft, in der vergangene Klimazustände anhand von Beobachtungen der Umwelt, vor allem mit geologischen, geographischen und botanischen Methoden rekonstruiert wurden. Ende der 50er Jahre wurden wichtige physikalische Messmethoden entwickelt. Die Messung schwacher Radioaktivität verschiedener Isotope war die Grundlage der Datierung von organischem Material und ermöglichte auch die Bestimmung von Fließraten in verschiedenen Umweltsystemen. Die Messung von stabilen Isotopen des Wassers erlaubte die Entwicklung eines "Paläothermometers" und vieler weiterer isotopenbasierter Indikatoren. Die Bestimmung der Konzentration von Spurengasen und -stoffen eröffnete erstmals die Möglichkeit, eine genaue Bestimmung der Veränderung der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre über die letzten 500'000 Jahre vorzunehmen. Zusammen mit der Erschließung von verschiedenen Paläoklimaarchiven – also Umweltsysteme, die zeitlich verändernde Variablen aufzeichnen und konservieren können, wie zum Beispiel Eisbohrkerne, Meeres- und Seesedimente, Baumringe, und viele weitere – wurde der wichtige Schritt zu einer quantitativen Forschung vollzogen, in welcher Grössen mit *Masseinheiten* versehen wurden.

Immer detailliertere Paläoklimadaten erfordern die quantitative Erfassung von Hypothesen bezüglich den Mechanismen der Klimaveränderungen. Hier beginnt die *Klimamodellierung*. Ihr Ziel ist das auf physikalischen und chemischen Grundlagen basierende Verständnis der unter anderem aus den Paläoklimaarchiven gewonnenen Informationen und Daten. Solche Modelle erlauben eine quantitative Bildung, und Untersuchung von Hypothesen über Ursachen und Mechanismen vergangener und zukünftiger Klimaveränderungen.

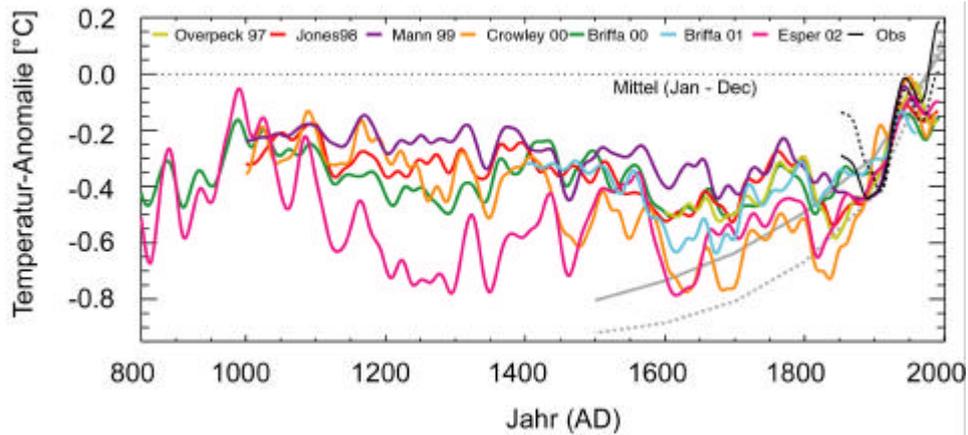
Nebenstehende Figur 1.3 beschreibt schematisch die Rolle der Modellierung in der Paläoklimaforschung. Klimaänderungen beeinflussen bestimmte Klimaparameter, welche durch die Entwicklung geeigneter Transferfunktionen "gelesen" werden können. Auch hier ist Modellbildung und -anwendung zentral, diese wird jedoch nicht als *Klimamodellierung* bezeichnet. Klimaarchive werden nur mit einer zuverlässigen Messtechnik der Forschung zugänglich. Die Tätigkeit des experimentell arbeitenden Klimaphysikers/in ist die Erstellung von Klimadaten (zum Beispiel die Bestimmung der CO₂ Konzentration der Atmosphäre über die letzten 10'000 Jahre). Die/der Modellierer/in beschäftigt sich mit der Entwicklung und Anwendung von Modellen, die im Rahmen von Prozessstudien Modelldaten liefern. Das Ziel ist eine Synthese der Modelldaten mit den Klimadaten; diese wird dann erreicht, wenn die zugrundeliegenden Mechanismen und Hypothesen zutreffend sind. Das Modell liefert also eine *quantitative, und auf physikalisch-chemischen Grundgesetzen basierende Interpretation* des Klimageschehens.



Figur 1.3: Aufgabe der Modellierung in der Paläoklimaforschung

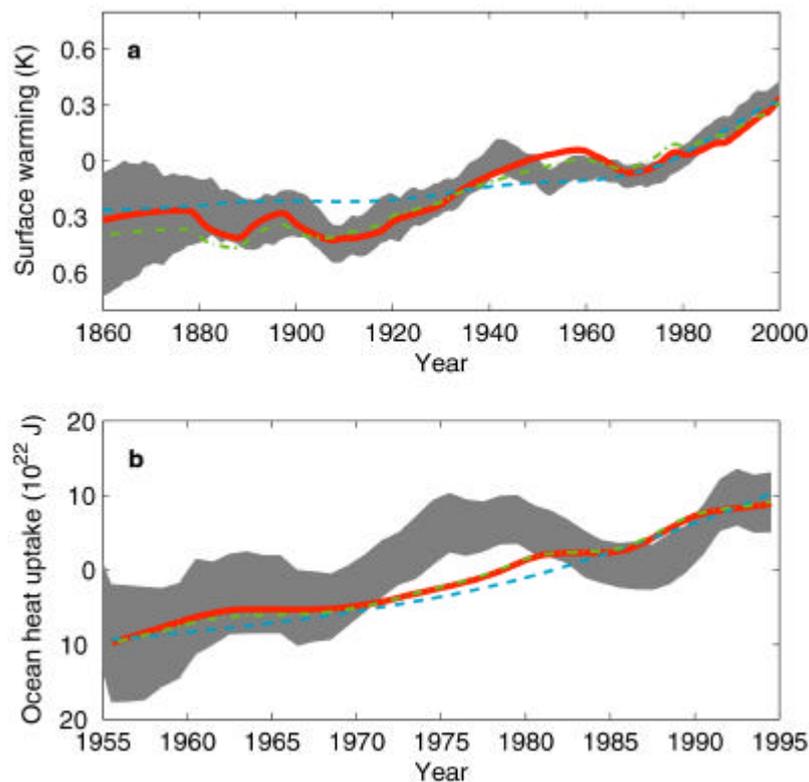
Der Verlauf der über die Nordhemisphäre und über das Jahr gemittelten Temperatur an der Erdoberfläche über die letzten 1200 Jahre gehört zur wichtigsten Klimainformation in der Debatte um die stattfindende Klimaveränderung (Fig. 1.4). Die zentrale Frage, die von Modellen beantwortet werden muss, ist, ob die rekonstruierte Erwärmung – und falls ja, welcher Anteil davon – durch den Anstieg von CO₂ in der Atmosphäre, und der damit verbundenen Änderung der Strahlungsbilanz, erklärt werden kann. Die Modellierung des Klimas des letzten 1200 Jahre erfordert eine genaue Kenntnis der verschiedenen Einflussfaktoren der Strahlungsbilanz. Die wichtigsten sind die Variation der Solarstrahlung, die Größe, Lage und Dauer von einzelnen Vulkanausbrüchen, die Veränderung der Landoberfläche durch Rodung und andere Aktivitäten, und die Rekonstruktion klimarelevanter Spurenstoffe in der Atmosphäre. Neben raffinierten statistischen Methoden sind es vor allem die Klimamodelle, die diese Fragen quantitativ beantworten können.

Die Abschätzung der *Klimasensitivität*, das heisst die global gemittelte Temperaturerhöhung bei einer Verdoppelung des atmosphärischen Gehaltes von CO₂ über das Niveau zu Beginn der Industrialisierung (von 280 ppm auf 560 ppm) ist von zentraler Bedeutung in der Klimaforschung. Modelle, die zur Beantwortung dieser Frage eingesetzt werden, müssen die natürliche Klimavariabilität und bereits erfolgte Klimaänderungen simulieren können.



Figur 1.4: Jährlich gemittelte Temperatur in der Nordhemisphäre ermittelt aus der Dicke von Jahrringen von Bäumen und anderen Paläoklimaarchiven über die letzten 1200 Jahre. Ein deutlicher Anstieg über die letzten 200 Jahre ist zu erkennen. Einzelne Rekonstruktionen zeigen aber auch ein sehr mildes Klima um das Jahr 1000, mit Temperaturen die diejenigen des frühen 20. Jahrhunderts deutlich übertrafen (Figur von Briffa and Osborn, 2002).

Ein aktuelles Beispiel aus der Abteilung für Klima- und Umweltphysik (KUP) ist in Figur 1.5 abgebildet. Dabei wurde ein vereinfachtes Klimamodell verwendet, das die grösst-skaligen Prozesse in Ozean und Atmosphäre beschreibt (Knutti et al., 2002, *Nature* 416, 719). Die global gemittelte Erwärmung, die von 1860 bis 2000 beobachtet wurde (graues Band) kann mit verschiedenen Modellsimulationen (Linien) einigermaßen wiedergegeben werden. Dabei ist der Langzeittrend akzeptabel modelliert, die einzelnen Variationen auf Zeitskalen von weniger als 10 Jahren können jedoch nur teilweise simuliert werden. Von der Aufnahme von Wärme in den Ozean kann ebenfalls nur der Trend über Jahrzehnte erfasst werden. Die



Figur 1.5: Veränderungen der mittleren Temperatur seit 1860, und Wärmeaufnahme im Ozean seit 1955 in Beobachtungen (graue Bänder) und verschiedenen Modellsimulationen (Linien).

wichtigen Abweichungen zwischen 1970 und 1990 können zwar in speziellen Simulationen auftreten, sind aber noch von keinem existierenden Klimamodell befriedigend erklärt worden. Dies zeigt deutlich die Grenzen der heutigen Klimamodelle auf.

Ein Klimamodell ist, wie jedes mathematische Modell von Naturvorgängen, eine *Vereinfachung*. Der Grad der Vereinfachung bestimmt die Komplexität des Modells und ist massgebend, ob dieses Modell für die vorliegende Fragestellung überhaupt verwendet werden kann. Die Komplexität eines gewählten Modells legt somit die Grenzen des Einsatzes fest. Diese Grenzen zu bestimmen, erfordert gewisse Erfahrung, da es keine objektiven Regeln oder Gesetze gibt. Gerade in der Entwicklung von Klimamodellen bedarf es besonderer Sorgfalt und einer natürlichen Skepsis: es ist nicht wünschenswert, alle Prozesse einzubauen und zu parametrisieren. Die Qualität eines Klimamodells misst sich nicht an der blossen Anzahl berücksichtigter Prozesse, sondern daran, wie gut die ausgewählten Prozesse und ihre Wechselwirkungen dargestellt sind.

Selbstverständlich besteht eine Aufgabe der Forschung und Entwicklung darin, die Auflösung der Klimamodelle ständig zu erhöhen. Damit stösst man aber beliebig schnell an die Grenze der verfügbaren Computerressourcen. Deshalb sind auch intelligente Vereinfachungen und reduzierte Komplexität gefragt. Dies äussert sich darin, dass die Klimaforschung sich heute auf eine *Hierarchie von Modellen* abstützt. Dies wird in Kapitel 2 behandelt.

1.4 Historische Entwicklung

Klimamodelle entstanden aus den Modellen, die für die Wettervorhersage seit etwa 1940 entwickelt wurden. Die Modellierung der Atmosphäre blickt also auf die längste Erfahrung im Bereich der Modellbildung zurück. Dabei war *Vilhelm Bjerknes* (1862-1962, Bild 1.6) der erste, der erkannte, dass die Wettervorhersage ein Problem der Mathematik und Physik ist. Daraus folgte, dass zur Berechnung der Strömung in der Atmosphäre Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie formuliert werden müssen. Diese werden ergänzt mit einer Zustandsgleichung für ein ideales Gas. Somit entwickeln sich Zustände in der Atmosphäre deterministisch, das heisst, sie sind durch physikalische Gesetze mit Zuständen vergangener Zeiten verknüpft. Bjerknes stellte fest, dass eine genügend genaue Kenntnis der Grundgesetze und der Anfangsbedingungen notwendig und hinreichend für eine Vorhersage sind.

Damit hat er die klassische Auffassung der Berechenbarkeit der Natur von Laplace übernommen. Es sollte sich erst später herausstellen, wie von Ed Lorenz 1963 gezeigt wurde, dass der Vorhersagbarkeit der Entwicklung eines nicht-linearen Systems, hier die atmosphärische Zirkulation, natürliche Grenzen gesetzt sind. Bjerknes begründete die für die Meteorologie bestimmende "Bergen Schule", die wegweisende Beiträge zum Verständnis der Zyklogese geleistet hat.



Bild 1.6: Vilhelm Bjerknes, Begründer der dynamischen Meteorologie.

Lewis Fry Richardson (1881-1953) war der erste, der eine numerisch basierte Wettervorhersage erstellte (Bild 1.7). Seine Berechnungen, die er um 1917 durchführte, basierten auf den Beobachtungsdaten von 12 vertikalen Profilen (Druck, Temperatur) an verschiedenen Stationen in Europa, die übrigens von Bjerknes stammten. Diese Daten dienten als Anfangsbedingungen. Richardson legte ein Berechnungsgitter mit der Auflösung von $3^\circ \times 1.8^\circ$, und 5 vertikalen

Schichten über Europa. Dieses umfasste etwa 150 Gitterpunkte, an denen die Drucktendenz berechnet werden sollte. Richardson verwendete die sogenannten primitiven Gleichungen, das heisst die horizontalen Impulserhaltungs gleichungen, die Kontinuitätsgleichung (= Erhaltung der Masse), und die Ideale Gasgleichung. Die Rechenarbeit für eine Vorhersage von 24 Stunden war enorm: sie dauerte 3 Monate. Erst mit der Verfügbarkeit der ersten Computer in den 40er

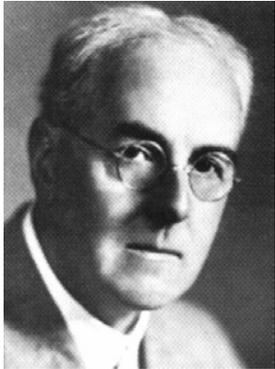


Bild 1.7: L.F. Richardson berechnete die erste Wettervorhersage.

Jahren waren Wettervorhersagen praktikabel, und wurden gegen Ende des 2. Weltkriegs auch als wichtiges taktisches Mittel eingesetzt.

Die ersten Berechnungen von Richardson lieferten wenig sinnvolle Resultate: Die Voraussage der Veränderung des Bodendrucks innerhalb von 6 Stunden ergab einen Wert von 145 hPa. Eine solch schnelle und grosse Veränderung ist nicht einmal im Zentrum eines Sturmtiefs möglich. Trotzdem publizierte Richardson sein Resultat 1922 im berühmten Buch *Weather Prediction by Numerical Process*. Das Problem war, dass die Anfangsbedingungen, also die Daten des Bodendrucks Fehler enthielten, die sich während der numerischen Prozedur aufschaukelten und zu den hohen Drucktendenzen führten. Eine Berechnung aufgrund der selben Beobachtungsdaten, die jedoch zu Beginn gefiltert werden (=Ausgleich von unnatürlich starken Gradienten), führt mit Richardson's Algorithmus zu plausiblen Vorhersagen (3.2 hPa/6 h).

Dies zeigt, dass die Anfangsbedingungen, das heisst die *Initialisierung* von Wetter- und Klimamodellen eine zentrale Problematik ist, deren man sich bei der Modellierung jederzeit bewusst sein muss. Doch nicht nur die Anfangsbedingungen, sondern auch die Formulierung der Erhaltungsgleichungen sind entscheidend. Selbst die besten Anfangsdaten hätten mit den Gleichungen von Richardson schliesslich zu einer Instabilität geführt, da sie physikalische Prozesse enthalten (Gravitationswellen), die die Berechnung der Lösung stark beeinträchtigen, und für lange Vorhersagezeiten verunmöglichen.

Der Durchbruch gelang *Carl-Gustav Rossby* (1898-1957), der die Erhaltung des Drehimpulses (*vorticity*), an Stelle des Impulses, postulierte.

Diese Beschreibung ist dem rotierenden Bezugssystem Erde besser angepasst, da der Effekt der Corioliskraft in natürlicher Weise berücksichtigt

werden kann. Die von ihm beschriebenen planetaren Wellen (Rossby-Wellen) treten in rotierenden Flüssigkeiten auf (Bild 1.8), also sowohl in der Atmosphäre wie auch im Ozean. Ozean und Atmosphäre reagieren auf Störungen (Temperaturanomalien, einsetzende Tiefenwasserbildung, etc.) immer mit der Ausbreitung von Rossbywellen, die die durch die Störung modifizierte Strömung aufbauen. Sie bestimmen auf diese Weise die Wettersysteme in der Atmosphäre und die gross-skalige Zirkulation im Ozean massgeblich.

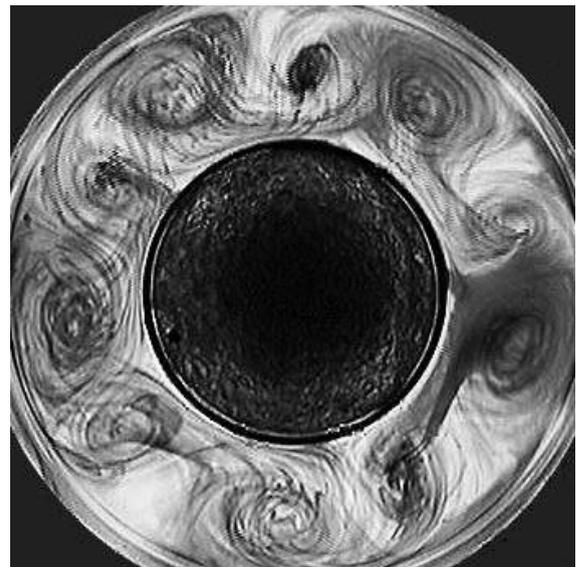


Bild 1.8: Stehende Rossbywellen in einem rotierenden Tank (http://depts.washington.edu/uwpccl/modeling/fluid_dynamics.html).

In den 40er und 50er Jahren kam der erste Computer (ENIAC, Electronic Numerical Integrator and Computer) im Auftrag der US Army in Princeton zum Einsatz. Das erste Projekt war die

erfolgreiche Vorhersage eines Sturms an der amerikanischen Ostküste. 1955 wurde die ersten Langzeitintegrationen eines vereinfachten atmosphärischen Zirkulationsmodells von *N. Phillips* durchgeführt: die Geburtsstunde der "Allgemeinen Zirkulationsmodelle" (*general circulation models*). In dieser Zeit wurde an mehreren Zentren mit der Entwicklung von Modellen begonnen, die die vollständigen Gleichungen der atmosphärische Strömung lösen.

Neben den numerisch komplexen Problemen wurden die theoretischen Untersuchungen zum fundamentalen dynamischen Verhalten der Atmosphäre und des Ozeans weitergetrieben. Die Erhaltung des Impulses, bzw. des Drehimpulses in einem sich bewegenden Fluid impliziert nichtlineare Terme in den Gleichungssystemen. Dies ist eine Folge der Advektion von Impuls in einer Strömung (Terme der Form $u \cdot \partial u / \partial x$, etc.); und tritt auch im rotierenden System auf. In diesen bewirkt die Corioliskraft eine zusätzliche Kopplung der horizontalen Bewegungsrichtungen. Nicht-linearitäten sind für die endliche Vorhersagbarkeit solcher Strömungen verantwortlich, wie *Ed Lorenz* 1963 (Bild 1.9) gefunden hat. In seinem berühmten Papier *Deterministic non-periodic flow*, (1963, *J. Atmospheric Sci.* 20, 130) beschreibt er, wie die grossskaligen Bewegungsmuster in der Atmosphäre zu chaotischem Verhalten führen können (siehe Kap. 7.2). Dieses Papier hat einen ganz neuen Wissenschaftszweig, *Chaotic Dynamics*, hervorgebracht. Obwohl zu jedem Zeitpunkt in deterministischer Weise (also durch partielle Differentialgleichungen) die Tendenz des Systems berechnet werden kann, verliert das System nach kurzer Zeit die Vorhersagbarkeit. Kleinste Unterschiede in Anfangsbedingungen führen nach kurzer Zeit zu völlig unterschiedlichen Zuständen. Eine Skalierung des Endzustandes als Funktionen der Anfangszustände ist nicht mehr möglich. Diese Erkenntnis ist unter dem Begriff "Schmetterlingseffekt" populär geworden. Ein hervorragendes Buch mit vielen mathematischen Beispielen ist *The Essence of Chaos* von E. Lorenz (U. Washington Press, 1996).

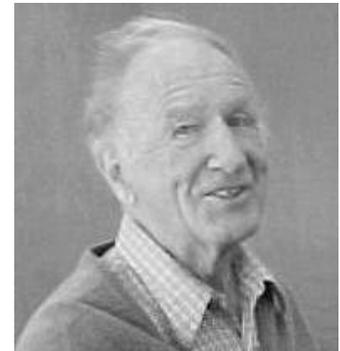


Bild 1.9: Edward Lorenz anlässlich eines Lunch am MIT (Feb. 2002)

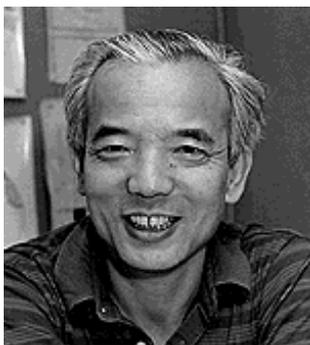


Bild 1.10: Suki Manabe, Pionier der gekoppelten Klimamodellierung

Mitte der 60er Jahre, also fast 20 Jahre nach der Entwicklung der ersten Modelle der Zirkulation in der Atmosphäre, wurden die ersten 3-dimensionalen Ozeanmodelle entwickelt. *Syukuro Manabe* erkannte, dass zur Untersuchung des Klimas die atmosphärischen Modelle mit denjenigen des Ozeans dynamisch gekoppelt werden müssen. Dies führte zum ersten gekoppelten Modell des Klimasystems (S. Manabe & K. Bryan, 1969, *Climate calculations with a combined ocean-atmosphere model*, *J. Atmospheric Sci.* 26, 786). Eine besondere Schwierigkeit bestand in den völlig unterschiedlichen Zeitskalen von Atmosphäre und Ozean (siehe Tabelle 1.1). Ein notorisches Problem war, dass die von Atmosphäre und Ozean benötigten Wärme- und Wasserflüsse, die eine mit den Beobachtungen übereinstimmende Klimatologie liefern, miteinander nicht kompatibel waren. Dies erforderte die Postulierung einer unphysikalischen *Flusskorrektur*, die über fast 30 Jahre in den meisten Modellen verwendet wurde. Dieses Thema wird im Kap. 8.6 behandelt. Das Problem konnte erst in den letzten Jahren gelöst werden, dank der erhöhten Auflösung der Modelle – im wesentlichen wird eine $2^\circ \times 2^\circ$ Auflösung oder besser benötigt –, sowie dank verbesserter Parametrisierungen von nicht explizit aufgelösten Prozessen.



Figur 1.11: Chronologie der Klimamodellentwicklung. Die Berücksichtigung verschiedener neuer Komponenten (Kohlenstoffkreislauf, Vegetation, und Atmosphärenchemie) führt zu einer drastischen Erhöhung der Komplexität, und der benötigten Computerressourcen. Sie stellt aber eine notwendige Entwicklung dar, um die Wechselwirkung der verschiedenen Prozesse quantitativ zu simulieren (aus IPCC 2001, The Science of Climate Change, Technical Summary, <http://www.ipcc.ch/pub/wg1TARtechsum.pdf>, Seite 48).

Seit 1990 wurden wesentliche Verbesserungen bei der Berücksichtigung von weiteren Klimasystemkomponenten erzielt (Fig. 1.11). Die Klimamodelle sind vollständiger geworden. Der Kohlenstoff- und andere Stoffkreisläufe, dynamische Formulierungen der Vegetationstypen, sowie die Chemie in der Atmosphäre gehören zu den Prozessen, die gegenwärtig in die bestehenden physikalischen Zirkulationsmodelle eingebaut werden. Die Klimamodellierung ist somit eine *interdisziplinäre* Forschung geworden.

Neben immer detaillierteren Modellen werden auch vereinfachte Klimamodelle entwickelt. Mit ihnen lassen sich in effizienter Weise grundsätzliche Probleme in der Klimawissenschaft untersuchen. Die Entwicklung und Anwendung von Klimamodellen reduzierter Komplexität (oft auch EMICs, *Earth system models of intermediate complexity* genannt) ist eine Spezialität der Abteilung für Klima- und Umweltphysik (KUP) am Physikalischen Institut der Universität Bern.

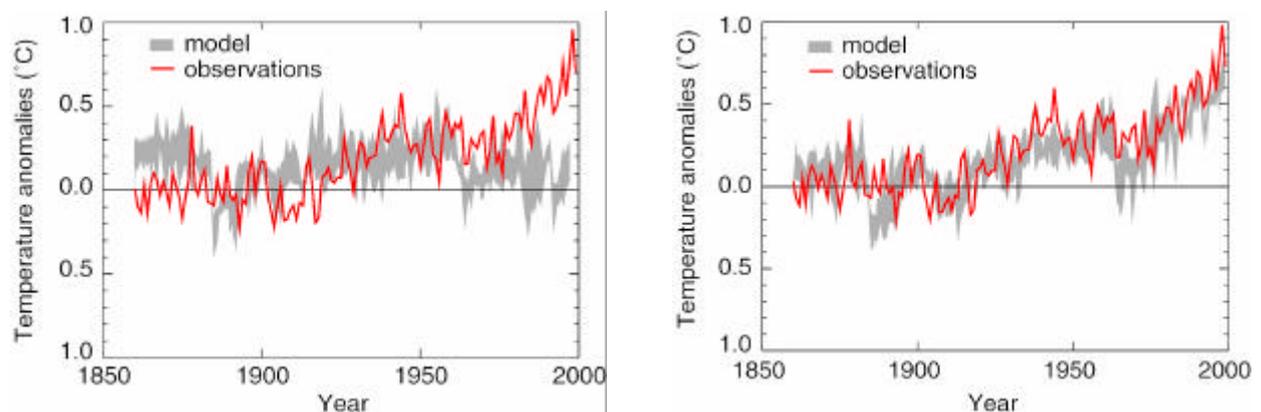
1.5 Einige aktuelle Beispiele zur Klimamodellierung

1.5.1 Simulation der letzten 150 Jahre zum Nachweis des Zusammenhangs CO_2 /Temperatur

Falls die wichtigen Antriebsfaktoren der Strahlungsbilanz genügend bekannt sind, kann mit einem 3-dimensionalen gekoppelten Klimamodell der Einfluss der ansteigenden CO_2 Konzentration in der Atmosphäre auf die Jahresmitteltemperatur abgeschätzt werden. In Fig. 1.12 sind die Resultate von vier Simulationen des Klimamodells des Hadley Centre (UK), mit verschiedenen Anfangsbedingungen (sog. Ensemble Simulationen) als graue Bänder dargestellt. Links ist nur die natürliche Variabilität des Modells vorhanden, dh. die Änderungen der Solar"konstanten" und Vulkanausbrüche, sowie Atmosphäre-Ozeanwechselwirkungen werden berücksichtigt, während die Konzentrationen von CO_2 und von Sulfataerosolen konstant gehalten werden. Das Modell zeigt in der global gemittelten Temperatur mit den Beobachtungen (dicke Linie) qualitativ übereinstimmende Schwankungen. Ab 1950 tritt eine systematische Abweichung aller Modellsimulationen von den Daten auf. Die Beobachtungen weisen durchwegs wärmere Temperaturen auf. Simulationen, in denen der beobachtete Anstieg von CO_2 seit 1850, und die abkühlende Wirkung von Sulfataerosolen seit ca. 1950 berücksichtigt sind, zeigen hingegen eine sehr gute Übereinstimmung über die letzten 150 Jahre. Das führte zur deutlichen Aussage:

There is new and stronger evidence that most of the warming observed over the last 50 years is attributable to human activities,

die im Rahmen des Dritten Statusberichts des Intergovernmental Panel of Climate Change, IPCC (siehe www.ipcc.ch) der UNO vom Januar 2001 gemacht wurde.

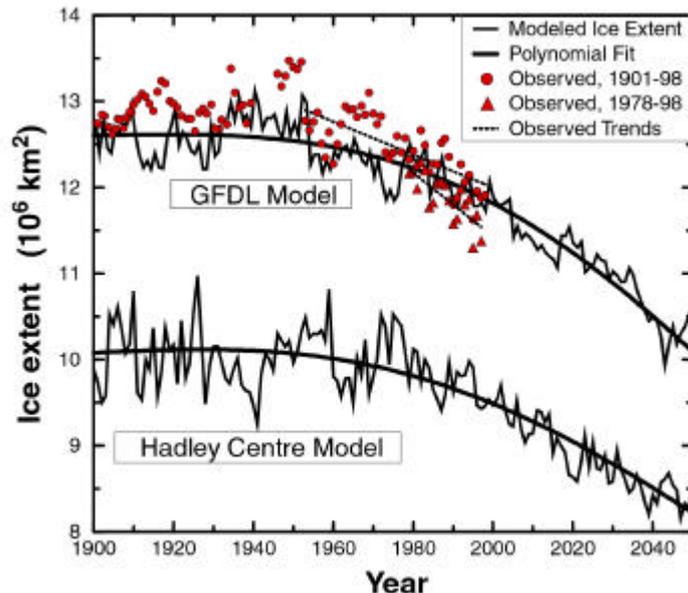


Figur 1.12: Global gemittelte Entwicklung der Temperatur seit 1850 basierend auf instrumentell gemessenen Beobachtungen (dicke Linie) und vier Ensemble Simulationen mit dem gekoppelten Klimamodell des Hadley Centres (graues Band). Links: Simulationen mit konstantem CO_2 und Aerosolen, beobachteten Vulkanausbrüchen und variable solare Strahlung. Rechts: zusätzlich vorgeschriebene atmosphärische CO_2 Konzentrationen und Sulfataerosole.

1.5.2 Abnahme der Eisbedeckung in der Arktis seit ca. 1960

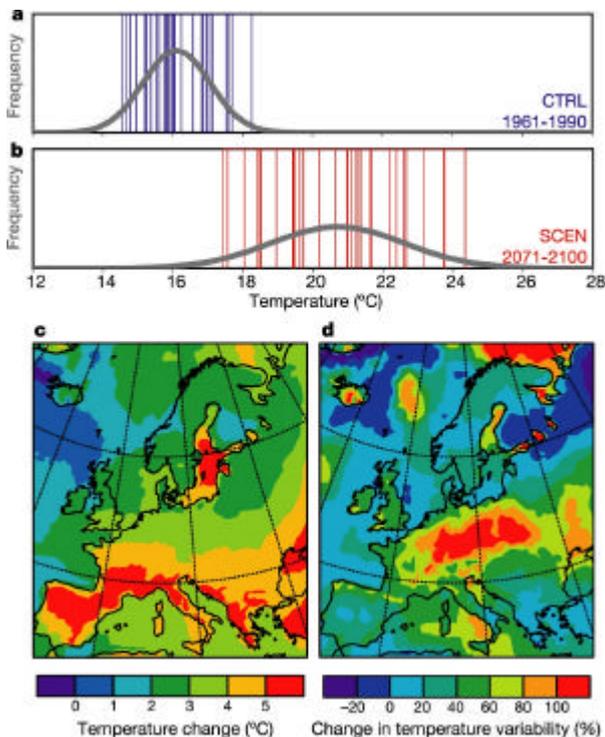
Die Abnahme der arktischen Eisbedeckung ist durch direkte und Satellitenbeobachtungen belegt. Seit etwa 1960 beschleunigt sich die Abnahme der gesamten Fläche (Fig. 1.13); Hinweise von

Unterseebootmissionen zeigen ebenfalls einen drastischen Rückgang der Dicke des Meereises. Eine ähnliche Entwicklung ist in zwei gekoppelten Klimamodellen sichtbar. Beide zeigen eine beschleunigte Abnahme der Ausdehnung des arktischen Meereises ab etwa 1960. Die Simulationen nehmen ab 1990 einen nach einem Szenario vorgeschriebenen Anstieg von CO₂ an. Die Übereinstimmung der Absolutwerte mit den Beobachtungen ist kein Mass für die Qualität der Modelle, denn sie hängt ab von einer vorher gewählten Mindesteisdicke, die zur Berechnung der Ausdehnung verwendet wird. Die Ergebnisse zeichnen eine düstere Prognose für die Arktis. Im Jahre 2050 wird nach diesen Simulationen die Eisfläche in der Arktis um etwa 20% abgenommen haben.



Figur 1.13: Veränderung der Meereisbedeckung in der Arktis seit 1901 anhand von Beobachtungen (Punkte) und Modellen (Vinnikov et al., 1999, *Science* 286, 1934).

1.5.3 Sommertemperaturen in Europa gegen Ende des 21. Jahrhunderts



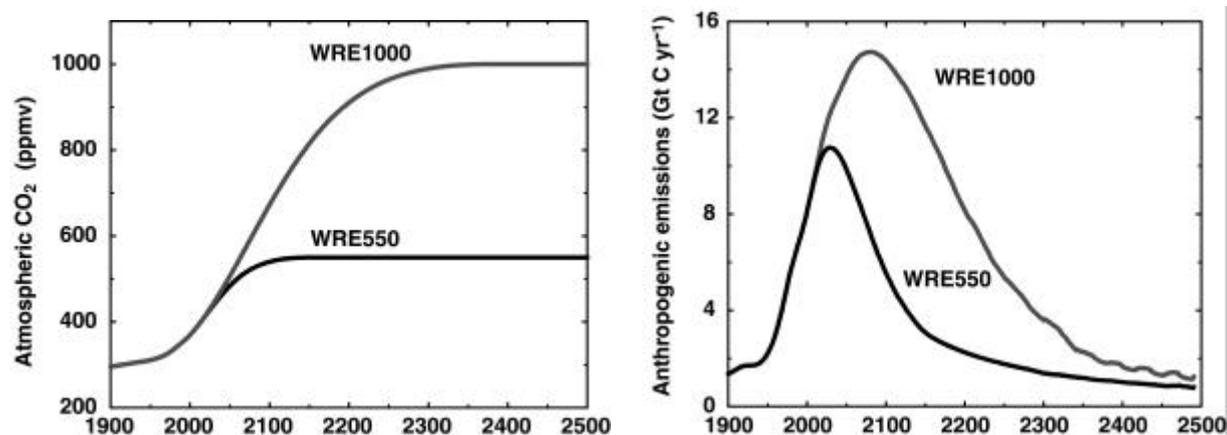
Figur 1.14: Verteilung und Abschätzung der Änderung der Sommertemperaturen und Variabilität in Europa im Jahr 2070-2100 berechnet mit einem Klima modell höchster Auflösung (Schär et al., 2004)

Die Frage, wie sich eine Erhöhung der mittleren globalen Temperatur auf das Klima von Europa auswirkt, kann nur mit den wenigsten Klimamodellen schätzungsweise beantwortet werden (Fig. 1.14). Die hohe Auflösung (56 km) benötigt enorme Computerressourcen, und es können nur sogenannte *Zeitscheiben* berechnet werden. Die Simulation mit dem Regional-klimamodell der ETHZ zeigt die Erhöhung der Sommertemperaturen in Europa für 2071-2100 (Schär et al., *Nature* 427, 334). Die Erwärmung tritt verstärkt in den höheren Lagen (wegen der positiven Rückkoppelung durch den Schnee-Albedo Effekt) und im mediterranen Bereich (wegen der positiven Rückkoppelung der Bodenfeuchte). Neben der starken Erwärmung – der Extremsommer 2003 mit Mitteltemperaturen von ca 22°C wird dann alle 2-3 Jahre auftreten – wird auch eine Verdoppelung der Variabilität erwartet. Eine einzelne Simulation ist, wie die Ensembleexperimente deutlich zeigen, noch keine zuverlässige Abschätzung der erwarteten Erwärmung Unsicherheiten wie

die Klimasensitivität, oder der Einfluss der Wolken müssen systematisch untersucht werden. Aufgrund dieser Unsicherheiten erfordern Klimavorhersagen in Zukunft die Angabe einer Wahrscheinlichkeit, die z.B. aus *ensemble simulations* bestimmt werden kann.

1.5.4 CO₂ Emissionen bei vorgeschriebenen atmosphärischen Konzentrationen

Die Einhaltung von tolerierten Konzentrationen von CO₂ und anderen treibhausaktiven Substanzen in der Atmosphäre, erfordert die Berechnung von Emissionen dieser Substanzen. Dies kann nur mit Klimamodellen erfolgen, die Beschreibungen der biogeochemischen Kreisläufe enthalten. Dabei ist der Austausch mit dem Ozean, und die Rolle der terrestrischen und marinen Biosphäre mit geeigneten Modulen oder Parametrisierungen zu berücksichtigen. Figur 1.15 zeigt ein an der KUP mit einem vereinfachten Klimamodell berechnetes Beispiel. Die langfristige Stabilisierung der CO₂ Konzentration kann nur durch eine massiv reduzierte, und schliesslich verschwindende Emission von CO₂ erreicht werden. Dies würde eine vollständige Abkehr von fossilen Brennstoffen bedeuten. 1998 betragen die Emissionen aller fossiler Energieträger (inklusive Zementproduktion) etwa 6.6 GtC/yr (1 GtC/yr = 1 Gigatonne Kohlenstoff pro Jahr = 10¹²kg C/yr). Die Berechnungen zeigen, dass nach einem erlaubten Maximum ab 2030 die Emissionen drastisch abnehmen müssen (ca. 1% global pro Jahr!). Solche Modellsimulationen haben für global-politische Entscheidungen (Kyoto Protokoll und seine Nachfolger) eine grundlegende Bedeutung.

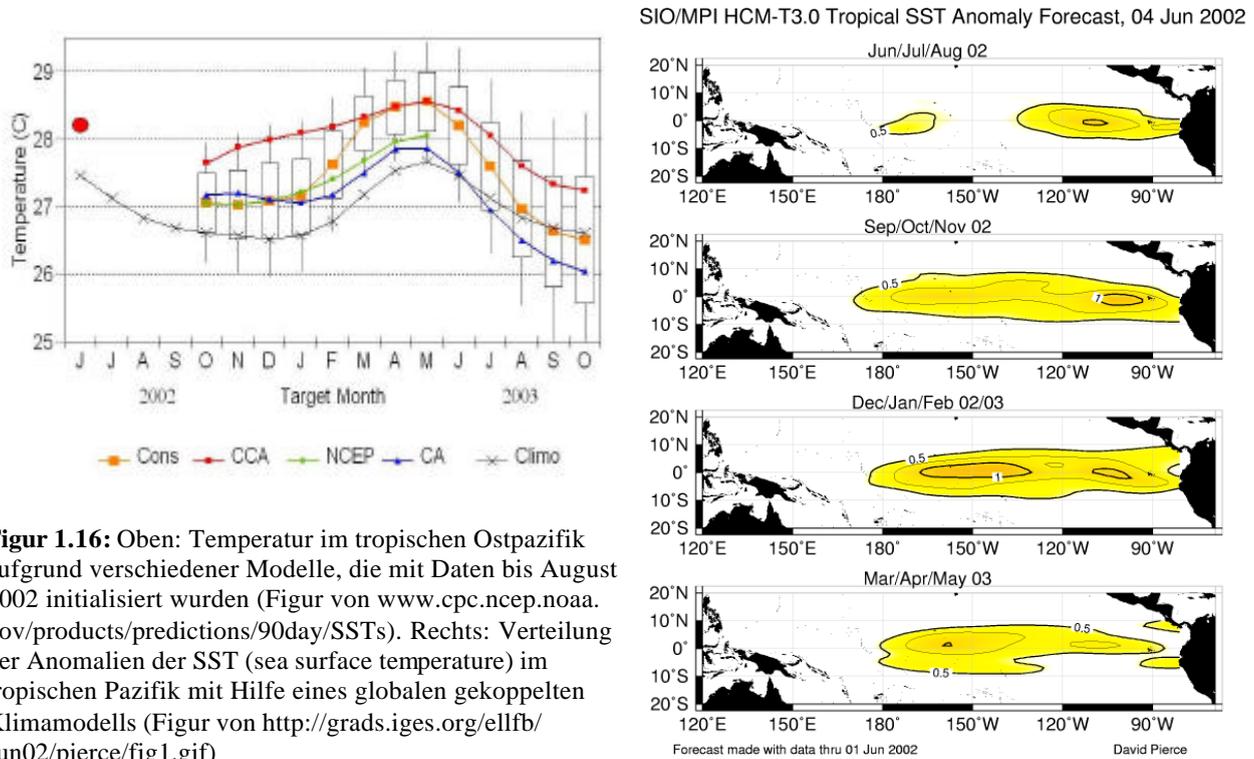


Figur 1.15: Vorgeschriebener möglicher Verlauf der CO₂ Konzentrationen in der Atmosphäre aufgrund von zwei Stabilisierungsszenarien (links). Mit Hilfe eines vereinfachten Klimamodells berechnete zulässige Emissionen von C (rechts). Das Modell simuliert nur die grundlegendsten Prozesse des globalen Kohlenstoffkreislaufs wie die Aufnahme von Kohlenstoff im Ozean und das Karbonatgleichgewicht. (Aus Joos et al., 1999, *Science* 284, 464)

1.5.5 Voraussage des schwachen El Niños von 2002/2003

Die unregelmässige Erwärmung von Gewässern im tropischen Ostpazifik, bekannt als das *El Niño-Southern Oscillation* (ENSO) Phänomen, hat massive Auswirkungen auf das tropische Klima, und besonders auf den Wasserkreislauf. Durch den Aufbau von atmosphärischen Druck- und Temperaturanomalien werden auch weltweit bedeutende Abweichungen vom normalen Klimageschehen verzeichnet (*teleconnections*). Diese Veränderungen, die einige Monate bis etwa 1.5 Jahre anhalten können, ziehen schwere ökonomische Schäden nach sich. Aufgrund der

verschiedenen teleconnections gibt es aber auch Gebiete, die von einem El Niño positiv beeinflusst werden (z. B. vermehrte Niederschläge in Vegetationsgebieten, wo Wasser der limitierende Faktor ist). Eine Schätzung geht davon aus, dass der grosse El Niño von 1997-98 in den USA zu wirtschaftlichen Auswirkungen (Gewinne und Verluste, abhängig von der Region) von etwa 25 Milliarden US\$ geführt hat. Eine zuverlässige Vorhersage von El Niño ist daher von höchster wirtschaftlicher und gesellschaftlicher Bedeutung.



Figur 1.16: Oben: Temperatur im tropischen Ostpazifik aufgrund verschiedener Modelle, die mit Daten bis August 2002 initialisiert wurden (Figur von www.cpc.ncep.noaa.gov/products/predictions/90day/SSTs). Rechts: Verteilung der Anomalien der SST (sea surface temperature) im tropischen Pazifik mit Hilfe eines globalen gekoppelten Klimamodells (Figur von <http://grads.iges.org/ellfb/Jun02/pierce/fig1.gif>)

Erstmalig konnte das ENSO Ereignis von 1997-98 bereits 6 Monate zuvor prognostiziert werden. Diese Zeitspanne erlaubt den betroffenen Regionen, Vorkehrungen zu treffen und sich auf die erwarteten klimatischen Auswirkungen (Trockenheit, Fluten, Missernten, erhöhtes Aufkommen von Malaria durch abnormal hohe Temperaturen, etc.) einzustellen. Diesem Erfolg ist eine jahrelange Forschung der Theorie der Wechselwirkung zwischen Ozean und Atmosphäre in den Tropen, Modellentwicklung, und die Einrichtung eines dichten Beobachtungsnetzes (in situ und via Satelliten) im tropischen Pazifik vorausgegangen.

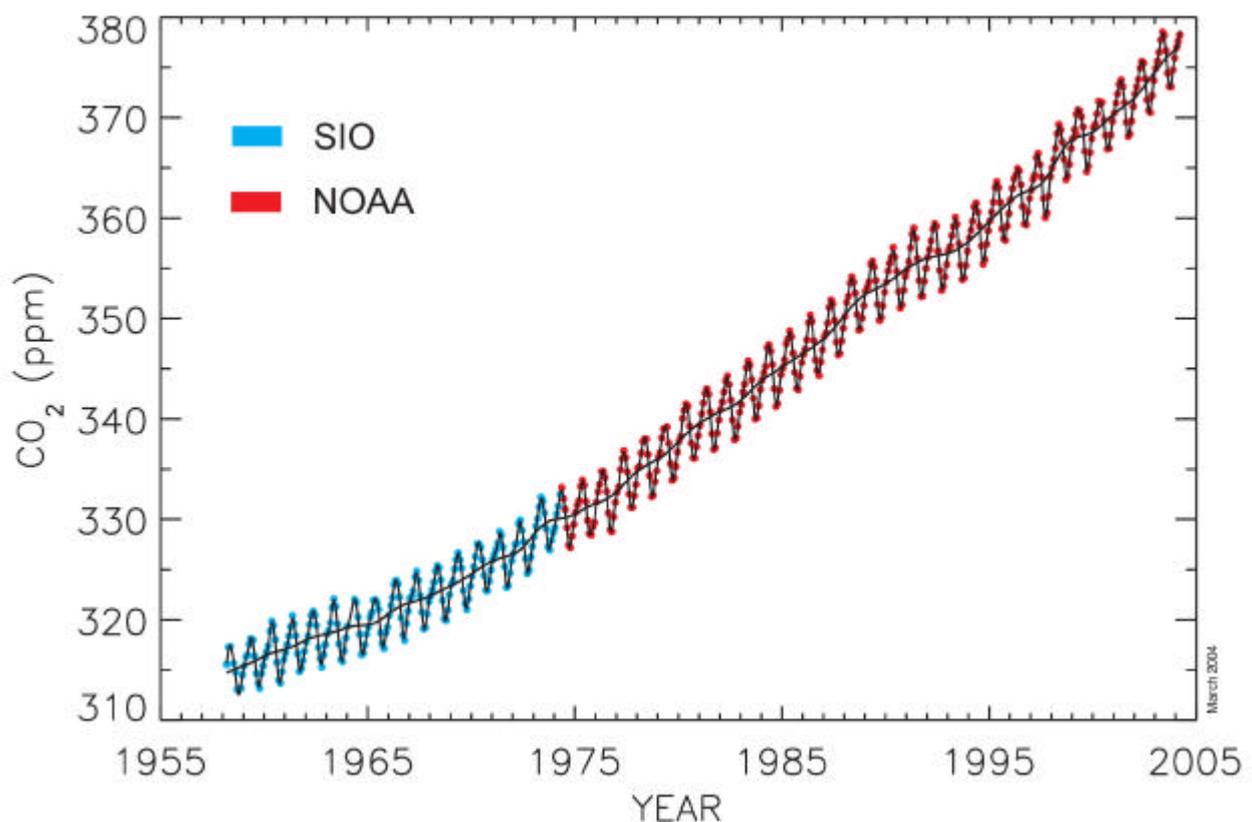
Figur 1.16 zeigt die Vorhersage des sich entwickelnden ENSO 2002/03, wie sie im August 2002 vorlag. Dabei geht man von einer moderaten Erhöhung der SST (*sea surface temperature*) im tropischen Ostpazifik (rechts) aus. Wichtig ist auch hier die Feststellung, dass die einzelnen Modelle sich in der Voraussage quantitativ unterscheiden. Die Vorhersage ist also mit einer Unsicherheit behaftet, ganz analog zur täglichen Wettervorhersage, in welcher die Voraussage des Auftretens von Regenschauern ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit angegeben wird.

1.6 Zusammenfassung

Klimamodelle sind vereinfachte Beschreibungen von Vorgängen im Klimasystem. Sie kommen zur quantitativen Prüfung von Hypothesen bezüglich Mechanismen von Klimaänderungen, sowie zur Interpretation von instrumentellen Daten und Paläoklimadaten aus verschiedensten Archiven zum Einsatz. Klimamodelle werden bereits heute operationell zur Vorhersage des wirtschaftlich bedeutenden ENSO-Phänomens eingesetzt. Hauptmotivation der Entwicklung und Anwendung von Klimamodellen bleibt jedoch die Aufgabe, zukünftige Klimaänderungen abzuschätzen.

Die Forschung mit und an Klimamodellen ist inzwischen interdisziplinär geworden und umfasst die Gebiete der Physik (Thermodynamik, Fluidodynamik, Atmosphärenphysik, Ozeanographie), Chemie (organische, anorganische, und Oberflächenchemie, Reaktionskinetik), Geochemie (Kreisläufe von Kohlenstoff, Stickstoff, etc.), und die Biologie (Vegetationsdynamik, Ökologie).

Ende der 60er Jahre wurden einfache Klimamodelle (Energiebilanzmodelle) entwickelt, um eine gewollte Klimamodifikation zu untersuchen (Budyko, 1969, *Tellus 21*, 611-619). Die Idee war, durch grossflächiges Ausstreuen von Asche die Schneedecke massiv zu reduzieren, und so eine Erwärmung von Sibirien, und somit die Erschliessung neuer landwirtschaftlicher Gebiete herbeizuführen ("geo-engineering"). Obwohl heute keine solch verrückten Ideen mehr ernsthaft ins Auge gefasst werden, sind wir uns bewusst geworden, dass der Mensch langsam und anhaltend in das Klimageschehen eingreift. Der Anstieg der atmosphärischen Konzentration von CO₂ (Fig. 1.17) beweist dies mit grosser Präzision.



Figur 1.17: Anstieg der CO₂ Konzentration gemessen seit 1958 auf Mauna Loa (Hawaii). Figur von <http://www.cmdl.noaa.gov/ccgg>

Diese Zeitreihe ist heute zu einem Eckpfeiler der Global Change Forschung geworden. Sie zeigt den durch die Emission von fossilen Energieträgern und die Umnutzung von Landflächen (Abholzung) verursachten Anstieg von CO₂. CO₂ ist heute über 30% höher als je zuvor in den letzten 450'000 Jahren. Gleichzeitig zeugt die Kurve vom Leben auf dem Planeten Erde. Die jahreszeitlichen Schwankungen sind das Resultat des Atmens der Biosphäre (Vegetation, Böden) der Erde. Im Nordfrühling wird Kohlenstoff aufgenommen, im Winter wieder abgegeben. Zusätzlich ist die mehrjährige Variabilität von CO₂ sichtbar, die durch Erwärmung und Abkühlung grosser Ozeanbereiche (z.B. während ENSO) verursacht werden.

Angesichts dieser fortschreitenden Veränderung der Zusammensetzung der Atmosphäre, und den nachfolgenden Klimaveränderungen hat sich die globale Gemeinschaft in Artikel 2 der UNO Rahmenkonvention zur Klimaänderung (UN Framework Convention on Climate Change, <http://unfccc.int>) ein erstaunlich klares Ziel gesteckt:

Article 2: The ultimate objective of this Convention and any related legal instruments that the Conference of the Parties may adopt is to achieve, in accordance with the relevant provisions of the Convention, stabilization of greenhouse gas concentrations in the atmosphere at a level that would prevent dangerous anthropogenic interference with the climate system. Such a level should be achieved within a time-frame sufficient to allow ecosystems to adapt naturally to climate change, to ensure that food production is not threatened and to enable economic development to proceed in a sustainable manner.

2 Modellhierarchie und einfache Klimamodelle

2.1 Hierarchie der physikalischen Klimamodelle

Es gibt kein *bestes* Klimamodell! Unterschiedliche Modelle haben unterschiedliche Qualitäten, sei es aufgrund ihrer Komplexität, oder der Art der eingebauten Parametrisierungen. In Tabelle 2.1 ist eine Übersicht über die Hierarchie von gebräuchlichen Klimamodellen dargestellt, angeordnet nach räumlichen Dimensionen. Dabei sind nur Modell-Typen bezeichnet; jeder Typ kann zudem numerisch unterschiedlich formuliert sein, d.h. verschiedene Auflösungen werden verwendet, andere Gitterstrukturen, Parameter und Parametrisierungen sind anders gewählt, etc. So gibt es zum Beispiel mehr als ein Dutzend verschiedene Ozeanzirkulationsmodelle, die alle in unterschiedlicher Weise im wesentlichen die selben Erhaltungsgleichungen lösen. Zum Vergleich der Modelle sind die verschiedenen *modeling intercomparison projects* wichtig: AMIP (*atmospheric modeling intercomparison project*), OCMIP (*ocean ...*), CMIP (*coupled ...*), PMIP (*paleo ...*).

Dimension		O z e a n			
		0	1	2	3
A t m o s p h ä r e	0	EBM Punktmodelle Dynamische Systeme: <i>Saltzman Modelle</i> Puls-Antwort Modelle <i>Siegenthaler/Joos</i> Neuronale Netzwerke <i>Knutti et al. 2002</i>	Ekman Modelle (z) globale Mischung (z) <i>Munk</i> Advektion-Diffusions Modell (z): <i>HILDA Bern</i> <i>Wigley-Raper</i>	thermohaline Modelle (lat/z): <i>Stommel, Marotzke</i> wind-getriebene Strömung (lat/long): <i>Stommel, Munk</i> tiefer Ozean (lat/long): <i>Stommel, Pedlosky</i>	OGCM
	1	EBM (lat): <i>Budyko, Sellers</i> radiativ-konvektives Modell (z): <i>Manabe</i>	—	Ozean (lat/z) + EBM (lat): <i>Bern 2.5d Modell</i>	—
	2	EBM (lat/long) <i>North and Crowley</i>	stat. dynam. Atm. (lat/z) + diffusiver Ozean (z): <i>MIT model</i>	Ozean (lat/z) + EBM (lat/long): <i>Bern 2.5d+ Modell</i> Ozean (lat/z) + stat.-dyn. Atm. (lat/long): <i>Climber</i>	OCGM + EBM (lat/long): <i>UVic model</i> OCGM + QG atm. Modell: <i>ECBILT-CLIO</i>
	3	AGCM + SST	AGCM + mixed layer	AGCM + slab ocean	A/OGCM

Tabelle 2.1: Hierarchie der gekoppelten Modelle für Ozean und Atmosphäre mit eigenen Beispielen, geordnet nach berücksichtigten Raumdimensionen. Die Richtung der Dimensionen ist in Klammern spezifiziert (lat = latitude, long = longitude, z = vertikal); 2.5d bedeutet mehrere 2-dimensionale Ozeanbecken, die im südlichen Ozean verbunden sind; EBM heisst *energy balance model*, QG steht für quasi-geostrophisch, AGCM (*atmospheric general circulation model*), OGCM (*ocean general circulation model*), SST (*sea surface temperature*). In kursiv sind einige Modellbeispiele genannt (entweder Autoren oder Modellbezeichnung). Das grau schattierte Gebiet enthält Klimamodelle reduzierter Komplexität (auch *Earth System Models of Intermediate Complexity, EMICs* genannt), mit denen lange Integrationen durchgeführt werden können (mehrere $10^3 - 10^6$ Jahre, oder grosse ensembles). Die Tabelle ist nicht vollständig besetzt: einige Kombinationen sind wenig sinnvoll.

Die Beantwortung komplexer Fragen in der Klimaforschung erfordert eine Modellhierarchie. Ein Beispiel ist die Frage nach dem Klima zum Zeitpunkt des Maximums der letzten Eiszeit (*last glacial maximum*) vor etwa 21'000 Jahren. Vereinfachte Modelle vom Typ des grauen Bereichs in Tabelle 2.1 erlauben ein systematisches Untersuchen des Parameterraumes: welche Antriebsfaktoren (Strahlung, Niederschlag) sind wichtig, um zum Beispiel die von paläoklimatischen Daten angedeuteten Wassermassenverteilungen im Ozean zu simulieren?, welche Parameter und Prozesse erlauben eine signifikante Abkühlung der Tropen?, etc.

Modelle räumlicher Dimension von 0 und 1 helfen, Konzepte zu erstellen. Geeignete Formulierungen dieser 0-dimensionalen Modelle sind unter gewissen Bedingungen äusserst nützlich zur Szenarien- und Ensembleberechnung. Das EBM Punktmodell wird in Kapitel 2.2 vorgestellt.

Die *Saltzman Modelle* sind global gemittelte Modelle, die einige wenige zeitabhängige Variablen enthalten (z.B. die mittlere Temperatur, das Eisvolumen, der CO₂ Gehalt, etc.), und zusammen ein nicht-lineares dynamisches System bilden. Es kann gezeigt werden, dass diese Modelle sich in rigoroser Weise von den Grundgleichungen herleiten lassen (Saltzman, 2001, *Dynamical Paleoclimatology: Generalized Theory of Global Climate Change*, Academic Press, 320 p.). Die Modelle bilden eine radikale Alternative zum klassischen Vorgehen in der Klimamodellierung, und liefern für einige fundamentale Fragestellungen interessante Hypothesen (z. B. der Übergang von 40'000 zu 100'000-jähriger Periodizität der Eiszeiten vor etwa 700'000 Jahren).

Die Puls-Antwort Modelle (*pulse response models*) sind effiziente Substitutmodelle von gewissen Grössen, die von 3-dimensionalen Modellen simuliert werden. Sie setzen jedoch ein lineares Verhalten der darzustellenden Prozesse voraus, das zuerst mit einem komplexeren Modell belegt werden muss. Die Antwort eines komplexen Modells auf eine beliebige Störung (beispielsweise die Erwärmung, verursacht durch die Erhöhung von CO₂ in der Atmosphäre) kann als zeitliches Integral von Elementarantworten des komplexen Modells auf eine Pulsstörung (δ -Funktion) dargestellt werden. Diese Modelle werden erfolgreich auch zur Berechnung der Aufnahme von CO₂ in den Ozean, oder bei der globalen Erwärmung als Input für Vegetationsmodelle eingesetzt. Wegen ihrer Einfachheit erlauben sie ausführliche Szenarienberechnungen.

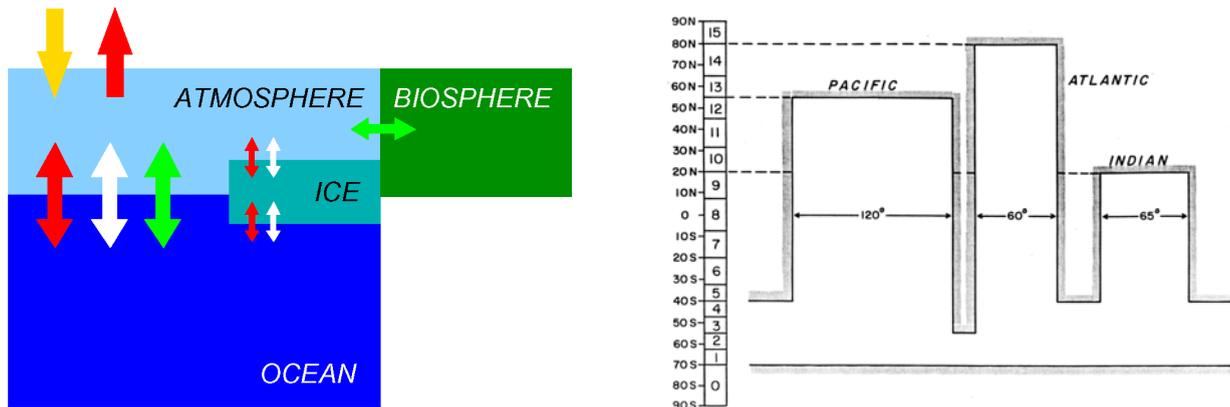
Eine noch nicht weit verbreitete, aber vielversprechende Methode ist die Anwendung von Neuronalen Netzwerken (*neural networks*), mit denen ebenfalls Substitute für ein komplexes Klimamodell gebildet werden. Im Gegensatz zu den *pulse response models* können Vorgänge, die nichtlinear sind, oder mehrere Gleichgewichte beinhalten, ebenfalls substituiert werden. Ein limitierender Faktor ist, dass Neuronale Netzwerke mit Simulationen des zu ersetzenden Modells trainiert werden müssen. Da solche "Trainingsets" eine Mindestgrösse aufweisen müssen, ist ein gewisser Rechenaufwand mit dem ursprünglichen Klimamodell notwendig. Ist das Netzwerk einmal trainiert, kann die Berechnung von Ensembles erfolgen. Die Methode wurde erstmals an der KUP im Rahmen einer Doktorarbeit eingesetzt (Knutti et al., 2003, *Clim. Dyn.* 21, 257-272).

Energiebilanzmodelle (EBM) gehören zu den ersten vereinfachten Klimamodellen, die zur quantitativen Abschätzung von Klimaänderungen verwendet wurden. Ein Beispiel wird später in der Vorlesung behandelt.

Advektions-Diffusions Modelle beschreiben summarisch die vertikale Vermischung im Ozean auf globalen Raumskalen. Mit ihnen wurden wichtige Erkenntnisse zum Kohlenstoffkreislauf erarbeitet (*HILDA Modell* der KUP); sie finden ihre Anwendung sowohl für Fragen der

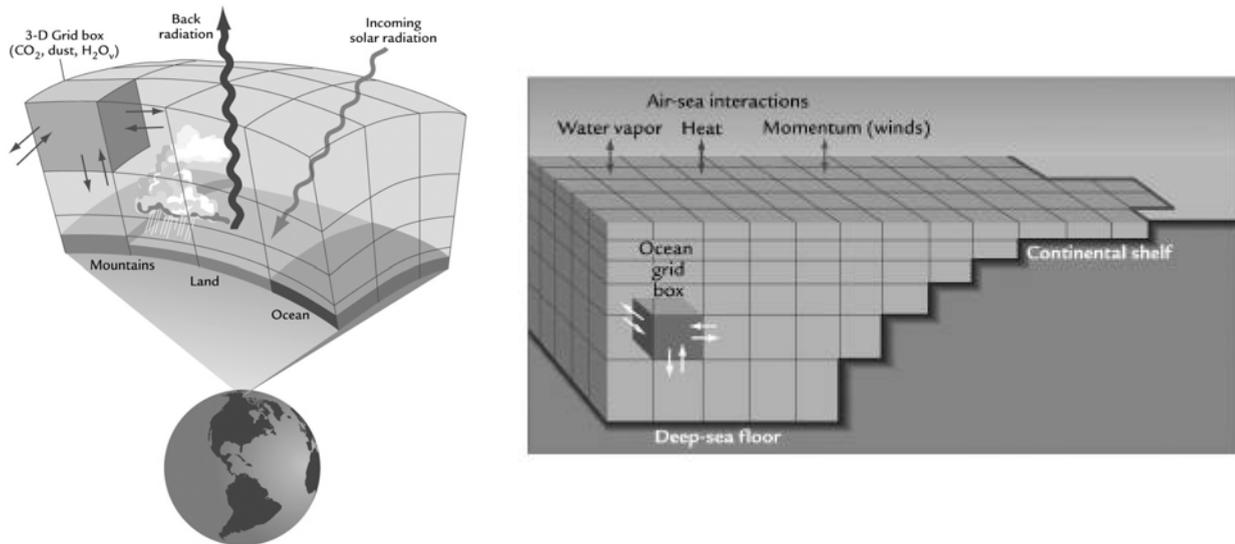
vergangenen Änderungen von CO_2 in der Atmosphäre (letzte 10'000 Jahre), wie auch zur Berechnung von Emissionsszenarien.

Die Modelle in der Kategorie (0/2) sind theoretische Modelle der physikalischen Ozeanographie, doch einige davon werden in vereinfachten Klimamodellen als Ozeankomponenten eingesetzt. Die Klasse dieser Klimamodelle reduzierter Komplexität (*earth system models of intermediate complexity*) sind in der Tabelle 2.1 grau hervorgehoben. Mit ihnen werden Langzeitsimulationen gemacht, die vor allem für die Paläoklimadynamik interessant sind.



Figur 2.1: Konzept und Geometrie des Bern 2.5d Modells, eines der ersten Klimamodelle reduzierter Komplexität. Ozeanströmungen sind zonal gemittelt, und werden in drei im Süden verbundenen Becken simuliert. Aufgrund der stark vereinfachten Darstellung des Klimasystems sind Simulation der Länge von 10^6 Jahren problemlos durchführbar.

Die Abteilung für Klima- und Umweltphysik (KUP) entwickelt und verwendet seit 1993 solche Modelle. Das Modellkonzept und die extrem vereinfachte Geometrie sind in Fig. 2.1 gezeigt. Obwohl nur wenige Atmosphäre- und Ozeanprozesse berücksichtigt sind, und die Zahl der Parametrisierungen minimal ist, weisen diese Modelle auf grossen räumlichen Skalen ($>10^6$ m) gute Übereinstimmung mit Beobachtungen (z.B. meridionale Verteilung der Lufttemperatur, Verteilung der Wassermassen in den drei Ozeanbecken) auf. Diese Modelle wurden in unterschiedlichen Varianten erfolgreich eingesetzt, um Probleme von vergangenen Klimaschwankungen, wie sie zum Beispiel in grönländischen Eisbohrkernen gefunden wurden, quantitativ zu simulieren. Dabei gelang es, auch einige grundlegende Aspekte der biogeochemischen Kreisläufe einzubauen, um so Modellergebnisse direkt mit Eisbohrkern-Messungen von CO_2 und anderen Treibhausgasen zu vergleichen. Die Modelle wurden auch verwendet, um die Stabilität der Ozeanzirkulation im Atlantik unter der globalen Erwärmung zu untersuchen. Das Modell zeigte beispielsweise, dass die Stabilität dieser Zirkulation nicht nur von der absoluten Erwärmung, sondern auch von der Erwärmungsrate abhängt (Stocker & Schmittner, 1997, *Nature* 388, 862). Dieses fundamentale Verhalten wurde nachher auch von 3-dimensionalen A/OGCMs (*atmosphere/ocean general circulation models*) bestätigt. Dies ist ein gutes Beispiel, wie mit Modellen reduzierter Komplexität neue und relevante Klima-Mechanismen gefunden werden, die dann von vollständigeren Modellen verifiziert, oder falsifiziert werden müssen. Mit geeigneten biogeochemischen Komponenten kann mit diesen Modellen auch die Wechselwirkung des globalen Kohlenstoffkreislaufs mit dem Ozean über die nächsten 1000 Jahre verfolgt werden (Joos et al., 1999, *Science* 284, 464, siehe auch Fig. 1.14). Dies ist für die Frage einer möglichen unkontrollierbaren Entwicklung im Zusammenhang mit dem Anstieg von CO_2 in der Atmosphäre (*run-away greenhouse effect*) von Bedeutung. Solche Modelle werden in



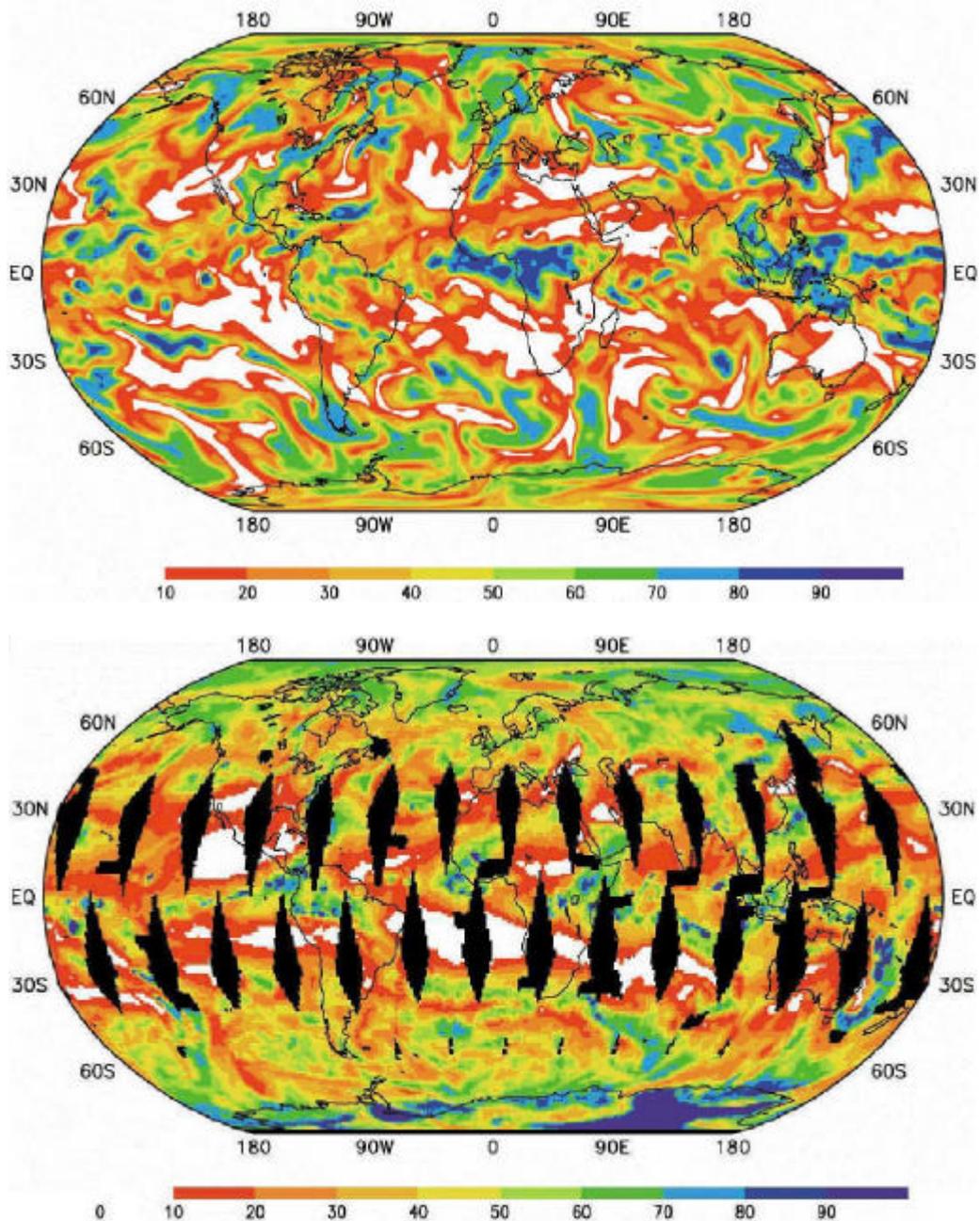
Figur 2.2: Schematische Darstellung der Modellgitter in 3-dimensionalen AGCMs und OCGMs. Die Auflösung eines gekoppelten Klimamodells beträgt üblicherweise zwischen $4^\circ \times 4^\circ$ bis $2^\circ \times 2^\circ$ und 20 bis 40 Schichten vertikal. Für einzelne Komponenten ist man heute bei Auflösungen im Bereich von 0.1° angelangt. Hier können jedoch entweder nur begrenzte Regionen berechnet werden, oder die Simulationen sind extrem kurz, also für Klimastudien noch nicht zugänglich. Bilder aus W.F. Ruddiman, 2000, *Earth's Climate: Past and Future*, W.H. Freeman, 465 p.)

Zukunft auch an makroökonomische Modelle gekoppelt (z.B. das MIT Modell in Kategorie 2/1), die die wirtschaftlichen Auswirkungen von Klimaänderungen und Handlungsstrategien untersuchen.

Die vollständigen Klimamodelle sind 3-dimensional in der Atmosphäre (AGCM, *atmospheric general circulation model*) und im Ozean (OGCM, *ocean general circulation model*). Die Gitterstruktur ist schematisch in Fig. 2.2 dargestellt. Die Kopplung der beiden, oft auf unterschiedlichen Gittern formulierten Modelle erfolgt dynamisch, das heisst es werden idealerweise in jedem Zeitschritt die Flüsse von Impuls, Wärme und Wasser ausgetauscht. Bei genügend guten Modellen ist dies in konsistenter Weise möglich, ansonsten müssen zur Stabilisierung des simulierten Klimas *Flusskorrekturen* eingesetzt werden.

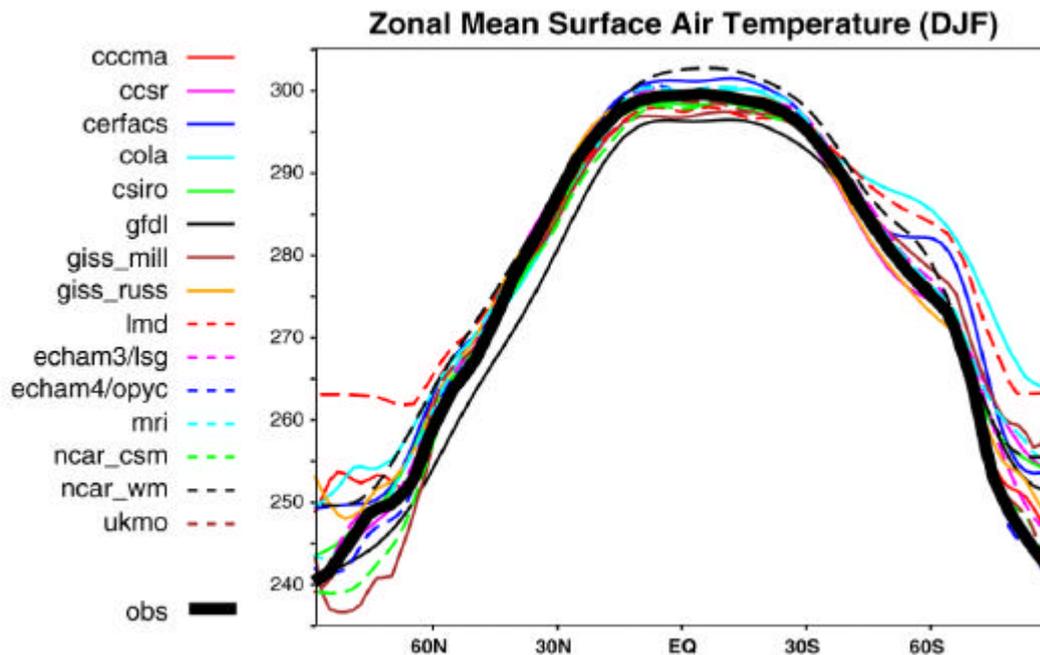
A/OGCMs nehmen den höchsten Platz in der Hierarchie der Klimamodelle ein. Sie sind jedoch extrem aufwändig bezüglich Entwicklung, Unterhalt, und Datenanalyse. Obwohl solche Modelle bereits auf PCs oder Clustern von PCs laufengelassen werden, sind den Integrationszeiten immer noch recht enge Grenzen gesetzt. Eine Simulation von mehreren 100 Jahren ist bereits ein sehr grosses Projekt! A/OCGMs enthalten eine grosse Anzahl von Parametrisierungen. Solche Modelle werden an verschiedenen Zentren weltweit entwickelt (Hadley Centre, UK; MPI Hamburg; NCAR, USA; NASA-GISS, USA; und weitere).

Die Übereinstimmung der modernsten Klimamodelle mit Beobachtungen ist auch für komplexe Grössen wie der Wasserdampf bereits beachtlich (Fig. 2.3). Die Atmosphäre zeigt eine äusserst reichhaltige Struktur von Gebieten, die sehr trocken (zwischen 20° und 45° Breite) sind, bis zu Gebieten mit über 90% Feuchte (Tropen, 50° bis 65° Breite). Die Modelle mit höchster Auflösung (ca. $1^\circ \times 1^\circ$) sind in der Lage, selbst sehr starke Gradienten, wie sie auch von Satelliten aus beobachtet werden, zu simulieren.



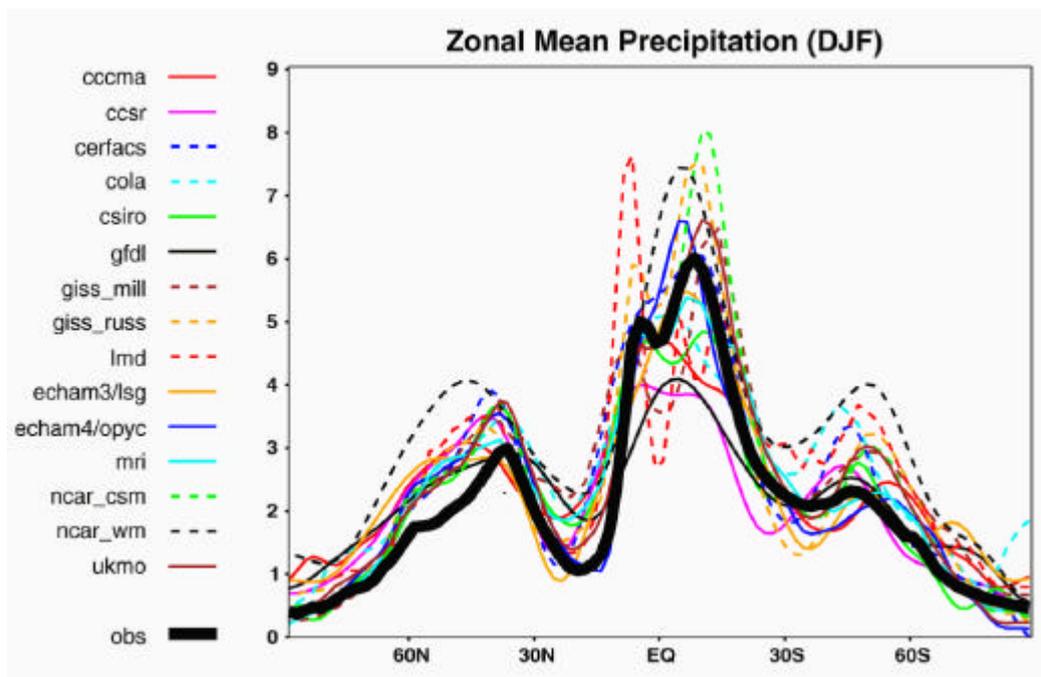
Figur 2.3: Vergleich der Leistung moderner Klimamodelle anhand des atmosphärischen Wasserdampfgehaltes auf 400 mb (ca. 7 km) angegeben als relative Feuchte (in %) an einem Tag im Mai. Links: Modellsimulation mit dem Modell des MPI Hamburg in höchster Auflösung (T106, M. Wild, ETHZ). Rechts: Mittlere relative Feuchte im Bereich 250 bis 600 mb aus Satellitendaten (SSM/T-2) berechnet, wobei Unsicherheiten ausserhalb 30°S und N grösser sind. Trockene Gebiete sind als weisse Flächen erkennbar. Figur von IPCC 2001, Kapitel 7.

Werden Klimamodelle untereinander verglichen, stellt man je nach betrachteter Variable immer noch grosse Abweichungen fest (Fig. 2.4). Dabei gilt generell, dass Wärme, im Gegensatz zu Wasserdampf, in den AGCMs mit kleineren Unsicherheiten verbunden ist, und die Modelle untereinander konsistenter sind. Die Streuung ist am grössten in den polaren Gebieten, wo auch die meisten numerischen Schwierigkeiten auftreten (Verjüngung des Modellgitters), und Temperaturunterschiede von über 20°C auftreten. In den Tropen, wo die Bildung von Wolken



Figur 2.4: Dezember-Februar Temperatur in Kelvin, zonal gemittelt in 15 globalen A/OGCMs und der Vergleich zur beobachteten Klimatologie (schwarze Linie). Figur aus IPCC 2001, Kapitel 8.

wesentlichen Einfluss auf die Bodentemperatur hat, ist die Streuung ebenfalls erhöht, in der südlichen Hemisphäre erscheint sie höher als in der nördlichen. Der Niederschlag gehört zu den schwierigsten Komponenten in der Klimamodellierung. Dementsprechend sind auch die Abweichungen zwischen den einzelnen Modellen in allen Variablen des Wasserkreislaufs gross.

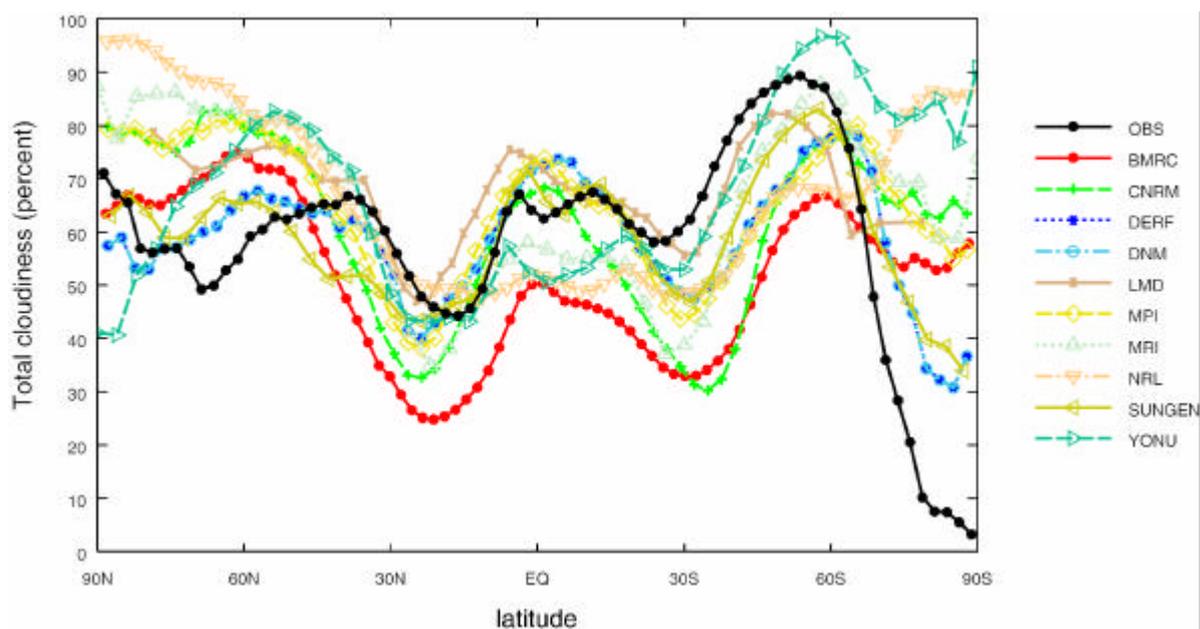


Figur 2.5: Dezember-Februar Niederschlag in mm/Tag, zonal gemittelt in 15 globalen A/OGCMs und der Vergleich zur beobachteten Klimatologie (schwarze Linie). Figur aus IPCC 2001, Kapitel 8.

Figur 2.5 zeigt den zonal gemittelten Niederschlag im Nord-Winter. Dabei sind die Abweichungen in den Gebieten verstärkter Niederschläge (Tropen, mittlere Breiten) hoch und können sich zwischen extremen Modellvarianten um bis zu einen Faktor 2 unterscheiden. Aus diesem Grunde sind Klimavorhersagen besonders bezüglich Regen und damit verbundener Extremereignisse noch äusserst unsicher.

Eine weitere wichtige Grösse ist die Verteilung der Wolkenbedeckung, da sie den Wasserdampfrückkoppelungseffekt massgeblich beeinflusst. Ein Modellvergleich ist in Figur 2.6 abgebildet. Gezeigt ist die Bewölkung im Winter (Dezember - Februar), wie sie von 10 AGCM simuliert wird. Die Abweichungen untereinander, und zum Teil auch von den Beobachtungen sind polwärts von ca. 60° beträchtlich. Solche Vergleiche zeigen die heutigen Grenzen der besten Modelle auf, und weisen auf die notwendigen Weiterentwicklungen (Gitterauflösung, Parametrisierungen, etc.) hin.

Eine umfassende Darstellung der Eigenschaften verschiedener Klimamodelle, und ihr Vergleich ist im Kapitel 8 von IPCC 2001 gegeben und kann auf im Internet eingesehen werden: www.grida.no/climate/ipcc_tar/wg1/308.htm.



Figur 2.6: Dezember-Februar Bewölkung in Prozent, zonal gemittelt in 10 AGCMs und der Vergleich zur beobachteten Klimatologie (schwarze Linie). Figur aus IPCC 2001, Kapitel 8.

2.2 Punktmodell der Strahlungsbilanz

Wir betrachten zuerst das einfachste aller möglichen Klimamodelle mit 0 Dimensionen. Eine einzige Erhaltungsgleichung, diejenige der global integrierten Wärmeenergie, soll gelöst werden. Es handelt sich also um ein Energiebilanzmodell (siehe Tab. 2.1, 0/0). Obwohl das Modell nicht wirklich von Bedeutung ist, ist es instruktiv, denn wir treffen in diesem Beispiel erstmals Parametrisierungen an, und sehen, wie fundamental die Lösungen von Klimamodellen von der genauen Wahl der Parametrisierung abhängig sind.

In diesem Beispiel, das in linearer Näherung analytisch lösbar ist, können wir auch erste numerische Verfahren behandeln, die bei der Klimamodellierung eingesetzt werden.

Wir nehmen die Geometrie an, die in Fig. 2.7 (links) gezeigt ist. Die Erhaltung der Energie einer dünnen, kugelförmigen Luftschicht (als Modell der Atmosphäre) lautet:

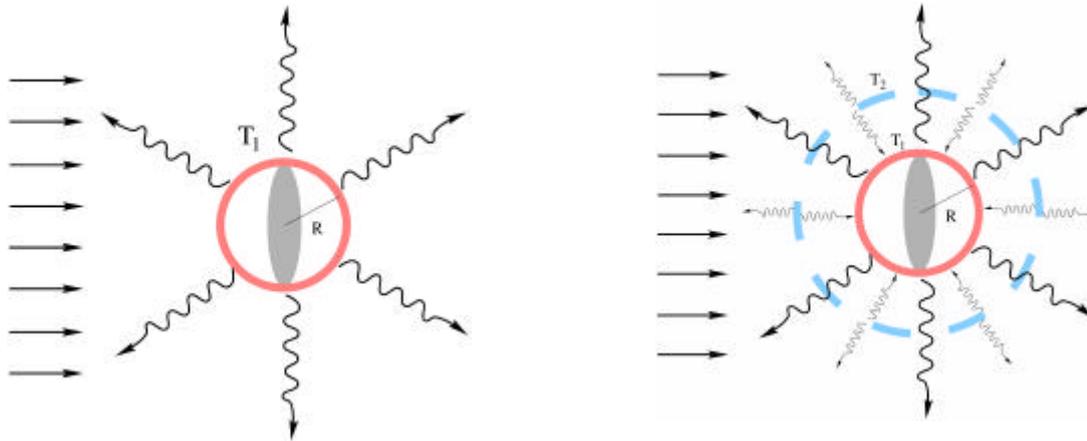
$$4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT}{dt} = \pi \cdot R^2 \cdot (1 - \alpha) \cdot S - 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4, \quad (2.1)$$

wobei folgende Größen verwendet wurden:

$R = 6371 \text{ km}$	Radius der Erde
$h = 8.3 \text{ km}$	vertikale Ausdehnung der Troposphäre
$\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$	Dichte von Luft
$C = 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	spezifische Wärme von Luft
T	global gemittelte Oberflächentemperatur
$\alpha = 0.3$	planetare Albedo (Reflektivität)
$S = 1367 \text{ W m}^{-2}$	Solarkonstante
$\varepsilon = 0.6$	Emissivität
$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	Stefan-Boltzmann Konstante

Gleichung (2.1) sagt aus, dass die Energieänderung (links) aufgrund von zwei Prozessen zustande kommt. Der erste Term rechts ist der Energiefluss, kurzweiliger Strahlung von der Sonne, der durch eine Kreisscheibe auf die Erde gelangt, vermindert um den reflektierten Teil. Der zweite Term beschreibt die langwellige Ausstrahlung von der gesamten Erdoberfläche. Dieser Term ist eine *Parametrisierung* eines komplexen und in diesem Modell nicht weiter beschriebenen Prozesses. Die Parametrisierung nimmt an, dass die langwellige Strahlung durch klassische Graukörperstrahlung mit dem Parameter ε (Emissivität) beschrieben werden kann. Die Rolle des Parameters in der Parametrisierung kann hier exemplarisch gezeigt werden.

Gleichung (2.1) ist eine gewöhnliche, nicht-lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für die unbekannte zeitabhängige Variable $T(t)$. In einfachen Fällen kann (2.1) analytisch gelöst werden.

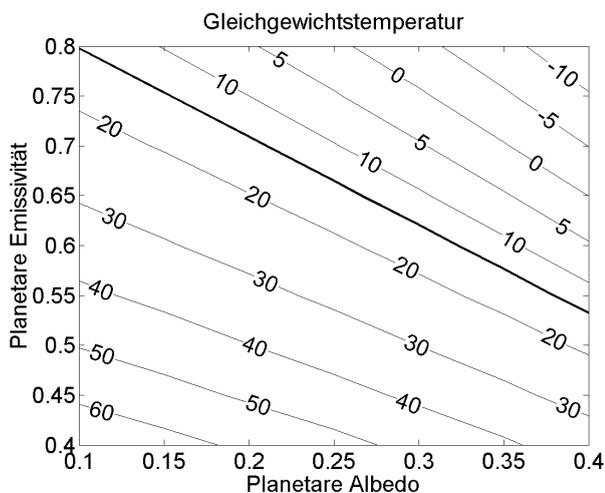


Figur 2.7: Schematische Darstellung einfacher globaler Energiebilanzmodelle mit einer (links), bzw. zwei (rechts) strahlenden Schichten. Die von der Sonne kommende kurzwellige Strahlung ist in geraden Pfeilen, die von der Erde, und von höheren Schichten der Atmosphäre ausgehende langwellige Strahlung ist mit gewellten Pfeilen dargestellt.

Die Gleichgewichtstemperatur ist einfach zu bestimmen, indem die linke Seite 0 gesetzt wird. Sie beträgt:

$$T = \left(\frac{(1-\alpha) \cdot S}{4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma} \right)^{0.25}, \quad (2.2)$$

und ist unabhängig von den Dimensionen der Erde und den Materialeigenschaften der Luft. Figur 2.8 zeigt T in $^{\circ}\text{C}$ für verschiedene Werte von α und ε . Die fette Linie bezeichnet 14°C , ungefähr die mittlere Oberflächentemperatur der Erde. Es ist offensichtlich, dass verschiedene, jedoch nicht beliebige, Kombinationen der Modellparameter α und ε zu "realistischen" Antworten führen. Den Vorgang, Modellparameter so zu wählen, dass eine Übereinstimmung der Modellresultate mit der Natur entsteht, nennt man **tuning** (einstellen). Wenn tuning erfolgte, ist die Übereinstimmung des Modells mit Beobachtungen nicht eine Aussage über die Qualität des Modells, ausser wenn weitere, unabhängige Information über die Werte von *tunable*



Figur 2.8: Gleichgewichtstemperatur nach Gleichung (2.2). Die aus Messungen bestimmte globale mittlere Oberflächentemperatur beträgt 14°C (fett markiert).

parameters herangezogen wird. In diesem Fall kommen Abschätzungen von α und ε aus satellitengestützten Daten in Frage, mit denen Komponenten der Strahlungsbilanz bestimmt werden können (ERBE, *Earth Radiation Balance Experiment*). Satellitengestützte Resultate ergeben eine planetare Albedo von $\alpha = 0.3$. Um eine mittlere Temperatur von 14°C im EBM zu erhalten, muss die planetare Emissivität $\varepsilon = 0.6206$ gewählt werden. Dies ist ein Wert, der wesentlich tiefer liegt, als Emissivitäten natürlicher Flächen, die $\varepsilon \approx 0.8 \dots 0.99$ haben. Dieser Modellparameter ist also unrealistisch für eine mittlere Erdoberfläche und sagt deshalb nicht aus, welche Prozesse in der Natur zu diesem Strahlungsgleich-

gewicht führen. Wäre die Erde ein perfekter schwarzer Körper, also $\varepsilon = 1$, so würde die Temperatur -18.3°C betragen. Die ca. $+33^\circ\text{C}$ sind dem **natürlichen Treibhauseffekt** der Erde zuzuschreiben, der hauptsächlich durch Wasserdampf verursacht wird.

Das soll an einem zweiten, leicht komplexeren EBM illustriert werden (Fig. 2.7, rechts). Wir nehmen an, dass die Abstrahlung sowohl von der Erdoberfläche auf Temperatur T_1 , als auch von einer höheren Fläche ("Cirrus Wolken", die die Albedo nicht beeinflussen) auf Temperatur T_2 erfolgt. Die hohe Wolkenfläche ist nicht vollständig, sondern belegt einen Anteil c der Gesamtoberfläche. Die stationäre Energiebilanz für die beiden Flächen beträgt

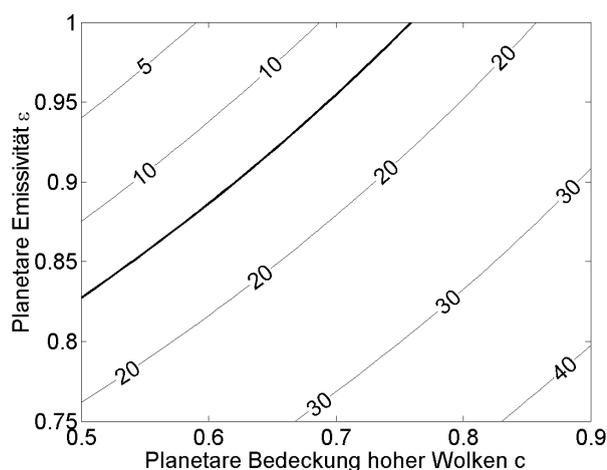
$$\pi \cdot R^2 \cdot (1-\alpha) \cdot S + c \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_1^4, \quad (2.3a)$$

$$c \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_1^4 = 2 \cdot c \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_2^4, \quad (2.3b)$$

wobei wir wieder annehmen, dass der Boden ein "grauer" Strahler mit Emissivität ε ist, während die Wolkenfläche ein schwarzer Körper ist. Die Lösung ist gegeben durch

$$T_1 = \left(\frac{(1-\alpha) \cdot S}{4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (1-c/2)} \right)^{0.25}, \quad T_2 = \left(\frac{(1-\alpha) \cdot S}{4 \cdot \sigma \cdot (2-c)} \right)^{0.25}. \quad (2.4a,b)$$

Wir haben jetzt zwar eine etwas detailliertere Beschreibung (zwei Temperaturen), aber dafür mehr Parameter (α , ε , c), für die sinnvolle Werte gewählt werden müssen. Fig. 2.9 zeigt, dass in diesem Modell nun realistischere Werte der Oberflächenemissivität angenommen werden können. Aus Fig. 2.6 folgern wir, dass eine Wolkenbedeckung von etwa 0.6 beobachtet wird. Indem wir wieder das Modell *tunen*, das heisst wir wählen $\varepsilon \approx 0.886$, erhalten wir eine Gleichgewichtstemperatur von 14°C . Mit diesen Werten ergibt sich $T_2 = -38.8^\circ\text{C}$; diese Temperatur wird auf etwa 8.2 km Höhe gemessen. Eine wichtige Erkenntnis aus diesem zweiten Modell ist, dass die Erde nicht nur von der Oberfläche, sondern auch auf höheren Niveaux Infrarotstrahlung in den Raum sendet. Der natürliche Treibhauseffekt kommt dadurch zustande, dass diese höhere



Figur 2.9: Gleichgewichtstemperatur nach Gleichung (2.4a). Die aus Messungen bestimmte mittlere Oberflächentemperatur beträgt 14°C (fett markiert).

Abstrahlung bei einer tiefen Temperatur stattfindet, und diese Niveaux auch nach unten abstrahlen (Rückstrahlung). Der Boden wird somit von einer Kombination von direkter kurzwelliger Sonnenstrahlung, und langwelliger Rückstrahlung erwärmt. Fig. 2.9 gilt nur für hohe Wolken, deren Effekt auf α klein ist. Wolken beeinflussen α und ε , und der Netto-Effekt ist meistens eine Abkühlung.

In Wirklichkeit muss man die Atmosphäre als Kontinuum betrachten, das heisst, auf jeder Höhe wird abgestrahlt. Diese Überlegungen führen dann zu den *radiative-convective models*, die wichtige Bestandteile von AGCMs sind.

2.3 Numerische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung

Wir betrachten nun wiederum das Klimamodell, das durch Gleichung (2.1) beschrieben ist, aber untersuchen nun dessen Zeitabhängigkeit. Es ist klar, dass die Lösung nur in den wenigsten Fällen noch analytisch gelingt, sondern sie muss also durch einen numerischen Algorithmus berechnet werden.

Bevor wir solche herleiten, wollen wir kurz das zeitliche Verhalten des EBMs anschauen. Wir zerlegen die Temperatur $T(t)$ folgendermassen

$$T(t) = \bar{T} + \tilde{T}(t) \quad ,$$

wobei \bar{T} die konstante Gleichgewichtstemperatur, gegeben in (2.2), ist. Damit wird (1) zu

$$h \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{1}{4} \cdot (1 - \alpha) \cdot S - \varepsilon \cdot \sigma \cdot (\bar{T} + \tilde{T})^4 \quad . \quad (2.5)$$

Da nun $\tilde{T} \ll \bar{T}$ kann man die rechte Seite von (2.5) linearisieren, indem für $|x| < 1$ die Entwicklung

$$(1 + x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot x^2 + \dots$$

verwendet wird. Nach Umformung erhalten wir

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = - \left(\frac{4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \bar{T}^3}{h \cdot \rho \cdot C} \right) \cdot \tilde{T} \quad . \quad (2.6)$$

Das ist eine lineare, homogene Differentialgleichung 1. Ordnung, deren Lösung bekannt ist:

$$\tilde{T}(t) = \text{const} \cdot e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{h \cdot \rho \cdot C}{4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \bar{T}^3} \quad , \quad (2.7)$$

wobei const eine von den Anfangsbedingungen bestimmte Konstante ist. Lösung (2.7) sagt aus, dass eine Temperaturstörung im EBM näherungsweise auf einer charakteristischen Zeitskala $\tau \approx 34.6$ Tage exponentiell abgebaut wird, und das Strahlungsgleichgewicht bei der Temperatur \bar{T} wieder erreicht wird. Das zeitliche Verhalten ist also durch die thermischen Eigenschaften der Atmosphäre bestimmt. Obige Betrachtung zeigt zudem, dass \bar{T} ein stabiler Gleichgewichtszustand ist.

Zur Lösung von (2.1) müssen also Ableitungen (hier einzig nach der Zeit) berechnet werden. Die Frage ist jetzt, wie diese Ableitungen berechnet werden sollen. Dabei gehen wir von der Idee aus, dass es genügt, wenn wir nur zu bestimmten, vorgewählten Zeitpunkten die Lösung näherungsweise kennen. Das Problem wird also in der Zeit *diskretisiert*. Die Zeitpunkte wählen wir nach der Vorschrift

$$t = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Δt heisst Zeitschritt (*time step*). Man kann (2.8) auch als "Gitterpunkte" auf der Zeitachse auffassen. Dabei ist zu beachten, dass der Zeitschritt wesentlich kürzer ist als die charakteristischen Zeitskalen der Prozesse, die das Modell beschreibt. Im vorliegenden Fall muss also $\Delta t \ll 35$ Tage gewählt werden.

Nehmen wir an, dass wir zum Zeitpunkt t die Lösung kennen. Dann kann $T(t)$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \left. \frac{dT}{dt} \right|_t \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d^2T}{dt^2} \right|_t \cdot (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left. \frac{d^3T}{dt^3} \right|_t \cdot (\Delta t)^3 + \dots \quad (2.9)$$

Wir können nun (2.9) nach der ersten Ableitung, ausgewertet zum Zeitpunkt t , auflösen:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_t = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} - \underbrace{\left(\frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d^2T}{dt^2} \right|_t \cdot \Delta t - \frac{1}{3!} \cdot \left. \frac{d^3T}{dt^3} \right|_t \cdot (\Delta t)^2 - \dots \right)}_{\text{Korrektur der Ordnung } \Delta t} \quad (2.10)$$

Durch die Vernachlässigung der Korrektur höherer Ordnung erhalten wir das sogenannte *Euler Schema* (*Euler scheme*), ein Differenzenschema 1. Ordnung, das heisst Korrekturen skalieren mit Δt . Die Korrektheit des Schemas kann durch Grenzwertbildung $\Delta t \rightarrow 0$ direkt nachgewiesen werden. Es ist die einfachste, aber auch ungenaueste Art, die erste Ableitung zu berechnen.

Durch Ersetzen von Δt durch $-\Delta t$ in (2.10) entsteht eine neue Gleichung, die zu (2.10) addiert eine neue Vorschrift für die erste Ableitung liefert:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_t = \frac{T(t + \Delta t) - T(t - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t} - \underbrace{\left(\frac{1}{3!} \cdot \left. \frac{d^3T}{dt^3} \right|_t \cdot (\Delta t)^2 - \frac{1}{4!} \cdot \left. \frac{d^4T}{dt^4} \right|_t \cdot (\Delta t)^3 \dots \right)}_{\text{Korrektur der Ordnung } \Delta t^2} \quad (2.11)$$

Das ist das Schema der zentrierten Differenzen (*centered differences*). Die Bezeichnung erinnert an die Position auf dem Zeitgitter, wo die Ableitung zwischen zwei benachbarten Punkten ausgewertet wird. Die Korrekturen skalieren nun mit $(\Delta t)^2$, und streben für kleine Δt schneller gegen 0 als in (2.10). Diese einfachen Schemen sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

Die Formulierungen nehmen eine äquidistante Diskretisierung an; Anpassungen sind notwendig, wenn die Gitterweiten ortsabhängig sind (z.B. ein Raumgitter auf einer Kugel).

Wir lösen jetzt Gleichung (2.6) numerisch. Wir diskretisieren mit Euler vorwärts:

$$\begin{array}{ll} \text{kontinuierlich:} & \frac{dT}{dt} = -A \cdot T \quad T(t) \\ \text{diskret:} & \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} = -A \cdot T_n \quad T_n \equiv T(n \cdot \Delta t) \end{array}$$

kontinuierlich	finite Differenzen	Fehler	Bezeichnung
$f'(x)$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	Euler vorwärts
$f'(x)$	$\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	Euler rückwärts
$f'(x)$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$	$O((\Delta x)^2)$	zentrierte Differenz
$f''(x)$	$\frac{f(x + \Delta x) - 2 \cdot f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$	$O((\Delta x)^2)$	zentrierte Differenz

Tabelle 2.2: Zusammenstellung der einfachsten Schemas zur Berechnung von 1. und 2. Ableitungen der Funktion f .

Somit folgt

$$T_{n+1} = T_n - A \cdot T_n \cdot \Delta t = (1 - A \cdot \Delta t) \cdot T_n = \dots = (1 - A \cdot \Delta t)^{n+1} \cdot T_0 \quad (2.12)$$

Ist die numerische Lösung (2.12) konsistent mit der analytischen Lösung (2.7)? Wir wollen zeigen, dass im Grenzwert von $\Delta t \rightarrow 0$ die numerische Lösung gegen die analytische strebt. Dazu transformieren wir $a = -1/(A \cdot \Delta t)$, womit nun der Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ gemacht werden muss. Somit entsteht:

$$T(t) = T(n \cdot \Delta t) = T_n = T_0 \cdot (1 - A \cdot \Delta t)^n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-a \cdot A \cdot t} = T_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right)^{-A \cdot t} \quad (2.13)$$

Es gilt nun

$$T_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right)^{-A \cdot t} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} T_0 \cdot e^{-A \cdot t} ,$$

in Übereinstimmung mit (2.7).

Damit ist gezeigt, dass die numerische Lösung bei beliebig kleinem Δt gegen die analytische Lösung strebt. Gibt es jedoch gewisse Fälle, wo das numerische Schema versagt?

Aus (2.12) ist ersichtlich, dass für $\Delta t = 1/A$ das Schema $T_n = 0$, und für $\Delta t = 2/A$ jedoch $T_n = (-1)^n \cdot T_0$ liefert, beides sinnlose Resultate. Das ist eine Besonderheit der zu lösenden Gleichung. Mit zentralen Differenzen kann es aber auch generelle Probleme geben, wenn z. B. periodische Lösungen mit unglücklich gewähltem Zeitschritt dargestellt werden sollen.

Das Eulerverfahren ist das einfachste, aber auch das ungenaueste Einschrittverfahren. Es löst allgemein

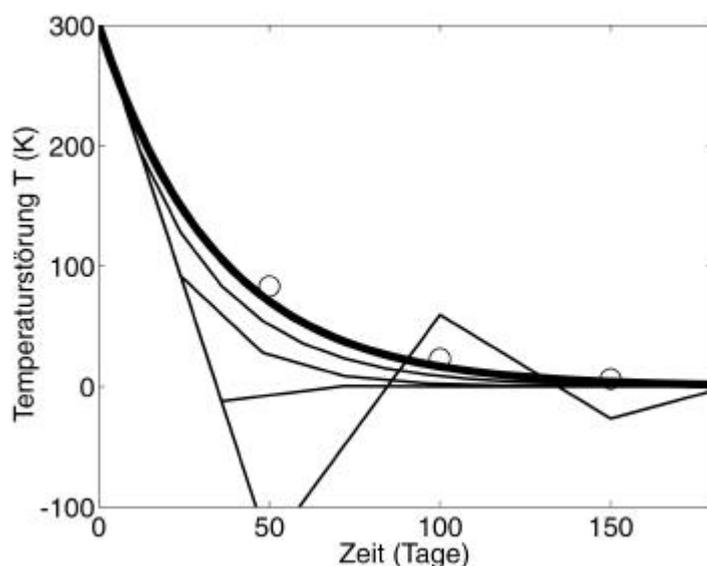
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \quad , \quad (2.14)$$

mit einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Im EBM, dargestellt durch Gleichung (2.1), ist $y = T$, $x = t$, und $f(x, y) = (1 - \alpha) \cdot S / 4 - \varepsilon \cdot \sigma \cdot y^4$. Das Eulerverfahren wertet die Ableitung nur gerade an den Stellen x und $x + \Delta x$ aus, was der Linearisierung, die in (2.10) vorgenommen wurde, entspricht.

Durch die Auswertung von $f(x, y)$ an weiteren Stützstellen im Intervall $[x, x + \Delta x]$, und deren geeignete Linearkombination, kann der Fehler von $O(\Delta x)$ auf $O((\Delta x)^k)$ reduziert werden. Dies führt auf Verfahren vom Typ *Runge-Kutta k-ter Ordnung*. Für $k = 4$ entsteht das klassische Runge-Kutta Verfahren, dessen Vorschrift wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta x \cdot F(x_n, y_n) \\ F(x_n, y_n) &= \frac{1}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= f(x_n, y_n) \\ K_2 &= f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x}{2} \cdot K_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x}{2} \cdot K_2\right) \\ K_4 &= f\left(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x \cdot K_3\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

In Figur 2.10 werden die einzelnen Schemata verglichen und mit der exakten Lösung (2.7) des linearisierten Systems (fette Linie) verglichen. Das Eulerschema wurde mit Zeitschritten von $\Delta t = 12, 24, 36, 50$ Tage verwendet. Verfahren, bei denen der Zeitschritt grösser ist als die



Figur 2.10: Numerische Lösung der Differentialgleichung (2.6) mit Anfangsbedingung $T=300$ K und verschiedenen Eulerschemata mit Zeitschritten 12, 24, 36, 50 Tage. Die exakte Lösung des linearisierten Systems ist fett gezeichnet; die Resultate mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren ($\Delta t = 50$ Tage) sind mit Kreisen markiert.

charakteristische Zeitskala τ , siehe (2.7), konvergieren zwar zur korrekten Lösung, aber zeigen ein völlig falsches transientes Verhalten. Durch Verkleinern des Zeitschritts nähert man sich der exakten Lösung langsam an. Erst Zeitschritte kleiner als die charakteristische Zeitskala von 35 Tagen liefern näherungsweise das transiente Verhalten der exakten Lösung. Für das Runge-Kutta Schema (Kreise) wurde ebenfalls $\Delta t = 50$ Tage gewählt. Die Übereinstimmung mit dem exakten Resultat ist trotz diesem langen Zeitschritt bereits wesentlich besser als mit dem Eulerverfahren mit $\Delta t = 12$ Tage .

Der Einsatz des Runge-Kutta Verfahrens bedingt, dass die Funktion f in Gleichung (2.14) an beliebigen Stellen (x, y) ausgewertet werden kann. In den meisten Klimamodellen ist diese wichtige Voraussetzung nicht gegeben, und eine Integration mit dem Runge-Kutta Schema ist daher nicht möglich.

2.4 Klimasensitivität im Energiebilanzmodell

Eine wichtige Grösse in der Klimadynamik ist die *Klimasensitivität* λ , definiert als die global gemittelte Temperaturänderung pro Änderung der Strahlungsbilanz um 1 Wm^{-2} . In einem Klimamodell muss zur Bestimmung der Klimasensitivität die Strahlungsbilanz verändert werden (z.B. durch die Erhöhung von CO_2). Grundsätzlich ist λ zeitabhängig. Die *Gleichgewichts-Klimasensitivität* λ_∞ wird bestimmt, wenn das Klimamodell unter der veränderten Strahlungsbilanz in einen neuen Gleichgewichtszustand gekommen ist. In teuren gekoppelten Klimamodellen muss sie meistens durch eine zeitliche Extrapolation bestimmt werden.

In der Literatur wird oft Temperaturerhöhung bei einer Verdoppelung der CO_2 Konzentration in der Atmosphäre ungenau als Klimasensitivität bezeichnet. Wir verwenden dazu jedoch die Bezeichnung $\Delta T_{2\times}$ [K], um sie von λ [$\text{K}/(\text{Wm}^{-2})$] zu unterscheiden.

Das Konzept der Klimasensitivität kann anhand des linearisierten EBMs eingeführt werden. Wir schreiben die Energiebilanz allgemein

$$0 = A(T) - B(T) + W(T) + \Delta Q, \quad (2.16)$$

wobei A die (via Albedo allenfalls temperaturabhängige) kurzwellige Strahlung, B die langwellige Rückstrahlung, W ein zusätzlicher Term in der Strahlungsbilanz (z.B. Effekte von Wolken, Treibhausgasen, Aerosolen, etc.), oft bezeichnet als *forcing*, und ΔQ eine Störung der Bilanz ist, die zu einer Temperaturänderung führt, die nun bestimmt werden soll.

Man entwickelt alle Funktionen nach T um die Gleichgewichtstemperatur \bar{T} und erhält

$$\begin{aligned} 0 &= A(\bar{T}) + A' \cdot (T - \bar{T}) - B(\bar{T}) - B' \cdot (T - \bar{T}) + W(\bar{T}) + W' \cdot (T - \bar{T}) + \Delta Q, \\ &= \underbrace{A(\bar{T}) - B(\bar{T}) + W(\bar{T})}_{=0} + (T - \bar{T}) \cdot (A' - B' + W') + \Delta Q, \end{aligned}$$

wobei $(\)'$ hier die erste Ableitung nach T bezeichnet. Die neue Temperatur T ist demnach

$$T = \bar{T} + \frac{-1}{A' - B' + W'} \cdot \Delta Q = \bar{T} + \lambda_{\infty} \cdot \Delta Q \quad . \quad (2.17)$$

Je grösser λ_{∞} desto grösser ist die Temperaturänderung bei einer Störung ΔQ . Demnach sind A' , B' , und W' inverse Klimasensitivitäten der zugehörigen Prozesse. Die aus den einzelnen Prozessen resultierende Gesamt-Klimasensitivität λ_{∞} berechnet man aus der Summe der *inversen* Einzelsensitivitäten:

$$-\frac{1}{\lambda_{\infty}} = \frac{1}{\lambda_A} - \frac{1}{\lambda_B} + \frac{1}{\lambda_W} \quad . \quad (2.18)$$

Das soll nun auf das "Zweischicht"-EBM (2.3) angewendet werden. Die Strahlungsbilanz für die Oberflächentemperatur ist gegeben durch

$$0 = \frac{1-\alpha}{4} \cdot S - \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 + \underbrace{\frac{c}{2} \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4}_W \quad , \quad (2.19)$$

wobei W die Effekte der hohen Wolken beschreibt. Cirruswolken bewirken einen positiven Beitrag zur Strahlungsbilanz, also Erwärmung.

Die Ableitung der einzelnen Strahlungsterme liefert die inversen Einzelsensitivitäten:

$$\frac{1}{\lambda_A} = -\frac{S}{4} \cdot \frac{d\alpha}{dT}, \quad \frac{1}{\lambda_B} = 4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^3, \quad \frac{1}{\lambda_W} = \frac{c}{2} \cdot 4 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^3 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \frac{dc}{dT} \quad . \quad (2.20)$$

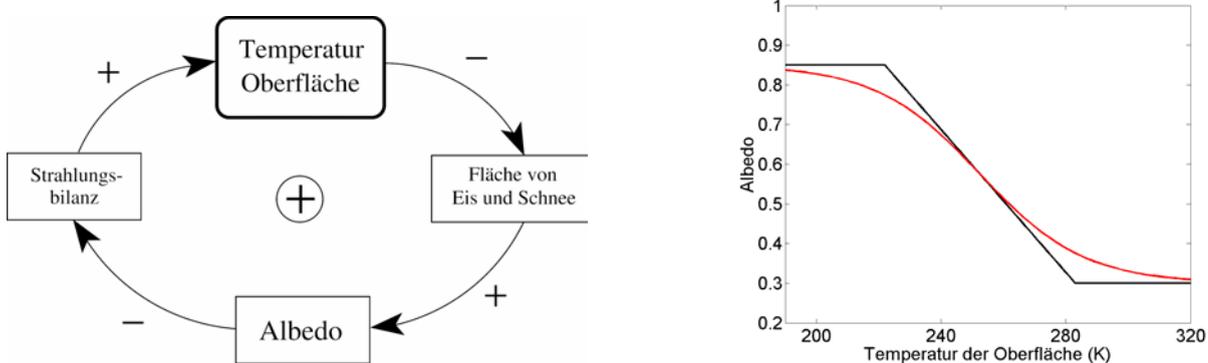
Unter der Annahme, dass die Albedo und Wolkenbedeckung zunächst nicht temperaturabhängig sind, und kein zusätzliches forcing vorhanden ist, erhalten wir

$$\lambda_{\infty} = \lambda_B = \frac{1}{4 \cdot 0.6206 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (287.15)^3} \frac{K}{Wm^{-2}} = 0.300 \text{ KW}^{-1}m^2 \quad . \quad (2.21)$$

Das ist die Klimasensitivität der langwelligen Strahlung ohne Rückkoppelungen, insbesondere ohne Wasserdampf-feedback. Vor allem die starke Temperaturabhängigkeit des Wasserdampfgehaltes in der Atmosphäre (Clausius-Clapeyron) – das wichtigste Treibhausgas –, wie auch temperaturabhängige Änderungen der Albedo und der Wolkenbedeckung können die Klimasensitivität sehr stark beeinflussen. Wir wollen das anhand des Eis-Albedo Feedbacks, Wasserdampf- und des Wolkenfeedbacks abschätzen.

2.4.1 Eis-Albedo Feedback

Ein sowohl global, wie auch lokal wichtiger Rückkoppelungsmechanismus, kurz *feedback*, ist verursacht durch die zeitliche und räumliche Veränderung der Ausdehnung der Schnee- und Eisbedeckung bei sich ändernden Temperaturen. Schnee und Eis haben hohe Albedowerte ($\alpha \approx 0.85$). Ist die Ausdehnung der Schnee- und Eisbedeckung gross – die ist tendenziell bei kälteren Temperaturen der Fall – so wird mehr kurzwellige Strahlung reflektiert. Es handelt sich hier um einen positiven feedback, wie dies aus dem Diagramm in Fig. 2.11 (links) hervorgeht. Bei globaler Erwärmung erwartet man, dass die Ausdehnung der Schnee-/Eisbedeckung zurückgeht, und die jahreszeitliche Bedeckung später einsetzt und früher endet. Das führt zu einer Verkürzung der saisonalen Bedeckung und somit zu einem positiven Beitrag zur jährlichen Strahlungsbilanz.



Figur 2.11: Eis/Schnee-Albedo Feedback (links) und zwei plausible Parametrisierung für ein EMB (rechts). Die Vorzeichen bei den Pfeilen zeigen die Korrelation zwischen der Grösse in der Box, vor der der Pfeil ausgeht, und der Grösse in der Zielbox. Die resultierende Korrelation ist im Zentrum des *feedback loop* angegeben. Ein Prozess, der sich selbst verstärkt, hat ein positives Vorzeichen, und kann deshalb zu Instabilitäten im Klimasystem führen. Ein negatives Vorzeichen bedeutet ein gedämpfter Prozess. Die Annahme der Parametrisierungen rechts ist, dass bei kühlen Temperaturen eine vollständige Schnee-/Eisdecke vorhanden ist, also $\alpha \sim 0.85$. Für hohe Temperaturen wird die planetare Albedo von 0.3 angenommen.

Es gilt nun, die Abhängigkeit der Albedo von der Temperatur im EBM zu parametrisieren. Dieses Problem wurde bereits 1969 von Sellers untersucht und basiert auf der Parametrisierung, die in Figur 2.11 (rechts) dargestellt ist. Es ist offensichtlich, dass in einem globalen Modell die Entwicklung der Schnee- und Eisbedeckung nicht simuliert werden kann. Deshalb geht man von *plausiblen* Annahmen aus, die zum Beispiel anhand von Korrelationen der Schneebedeckung und regionalen Temperaturen motiviert sein können. Sellers schlug vor:

$$\alpha = 0.3 - 0.009 \cdot (T - 283 \text{ K}) \text{ K}^{-1}, \quad 222 \text{ K} \leq T \leq 283 \text{ K}, \quad (2.22)$$

doch könnte man auch eine kontinuierliche Formulierung wählen (Fig. 2.11, rechts). Aus (2.22) entnehmen wir

$$\frac{1}{\lambda_A} = -\frac{S}{4} \cdot \frac{d\alpha}{dT} = \frac{1367 \cdot 0.009}{4} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1} = 3.08 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}, \quad (2.23)$$

ein positiver feedback.

Somit ist die gesamte Klimasensitivität

$$\lambda_{\infty} = \frac{1}{1/\lambda_B - 1/\lambda_A} = \frac{1}{3.33 - 3.08} \text{ KW}^{-1}\text{m}^2 = 4 \text{ KW}^{-1}\text{m}^2 . \quad (2.24)$$

Gegenüber (2.21) stellt dies eine grosse Verstärkung der Klimasensitivität dar. Der Wert in (2.24) ist quantitativ fern der Realität, denn nicht der ganze Planet, sondern nur die polaren Gebieten sind allenfalls einem solchen Prozess unterworfen. Dass (2.24) zu gross ist, zeigen auch Abschätzungen des Temperaturunterschieds Eiszeit / Warmzeit. Trotzdem ist die Betrachtung instruktiv, da sie die Wirkung von positiven und negativen feedbacks im Klimasystem illustriert.

2.4.2 Wasserdampf-feedback

Wir betrachten das Zweischicht EBM als Modell für die Wirkung des Wasserdampfs und nehmen zunächst an, dass c nicht von der Temperatur abhängt und $c \approx 0.6$ (Fig. 2.6). Somit wird aus (2.20)

$$\lambda_{\infty} = \frac{1}{1/\lambda_B - 1/\lambda_W} = \frac{1}{3.33 - 1.0} \text{ KW}^{-1}\text{m}^2 = 0.43 \text{ KW}^{-1}\text{m}^2 , \quad (2.25)$$

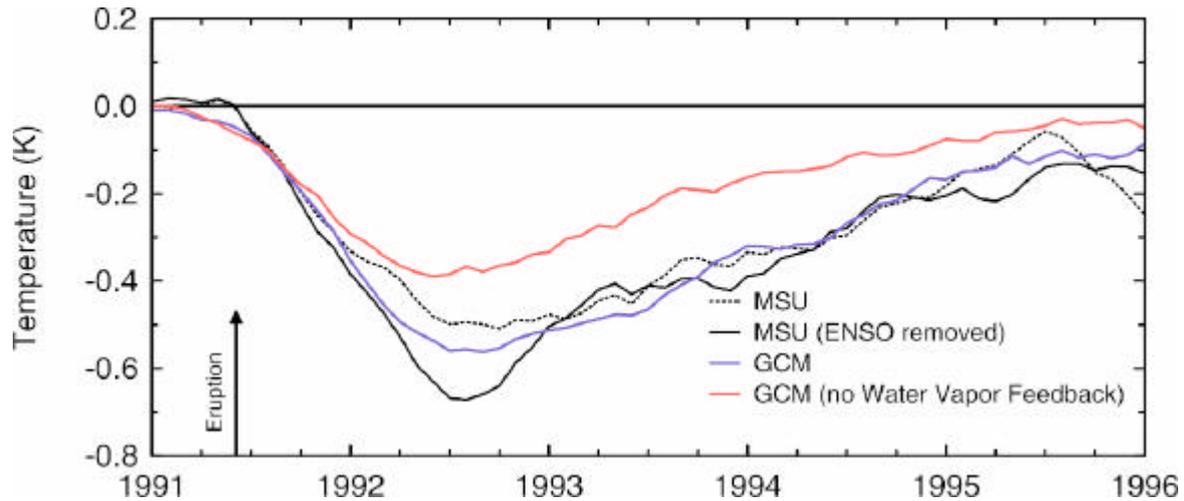
also eine wesentliche Erhöhung ($\approx 50\%$) von λ_{∞} gegenüber (2.21). Wasserdampf im Klimasystem erhöht deshalb die Klimasensitivität.

Das Zweischicht-EBM ist allerdings nicht das geeignete Modell, den Wasserdampf-feedback korrekt zu quantifizieren. Dazu werden radiativ-konvektive Modelle verwendet, und die auf Beobachtungen beruhende Annahme einer konstanten relativen Feuchte (=gemessener Dampfdruck/Sättigungsdampfdruck), womit man

$$\lambda_{\infty} \approx 0.5 \text{ KW}^{-1}\text{m}^2 \quad (2.26)$$

erhält.

Der Wasserdampf-feedback ist schwierig direkt zu beobachten. Die Übereinstimmung der räumlichen Strukturen der Wasserdampfverteilung, wie sie in Fig. 2.3 gezeigt wurde, ist noch kein Garant dafür, dass Klimamodelle die Sensitivität (ein Mass der Veränderlichkeit) richtig wiedergeben. Erst kürzlich wurde anhand von Beobachtungen der Temperaturänderungen nach dem grossen Vulkanausbruch von Pinatubo gezeigt, dass heutige Klimamodelle den Wasserdampf-feedback recht gut simulieren.

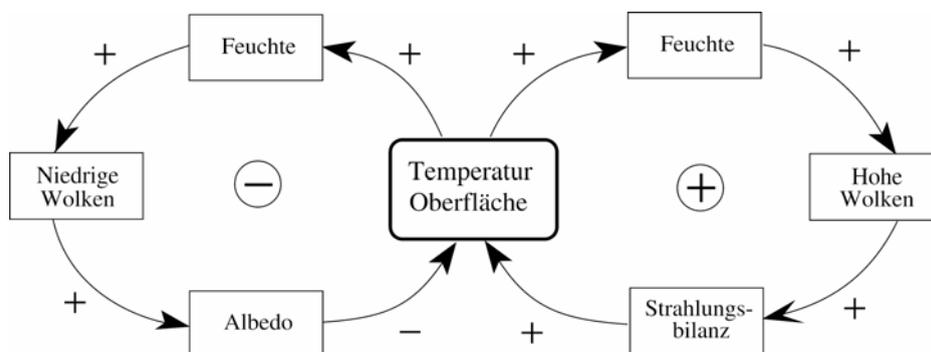


Figur 2.12: Global gemittelte Temperaturabweichung in der mittleren Troposphäre nach der Eruption von Mount Pinatubo 1991. Eine globale Abkühlung von 0.7°C wurde anhand von Strahlungsmessungen von Satelliten (microwave sounding unit, MSU) beobachtet, nachdem ein erwärmender Effekt des 1992/93 ENSO abgezogen wurde. Ein Klimamodell, in dem der Wasserdampf-feedback abgestellt ist, zeigt eine geringere Abkühlung. (Soden et al., 2002, *Science* 296, 797).

Ein Klimamodell mit Wasserdampf-feedback ist in der Lage, die der Eruption folgende globale Abkühlung der mittleren Troposphäre von ca. 0.7°C zu simulieren (Fig. 2.12). In einem Modell, in dem der Wasserdampfgehalt fixiert wurde, ist die Abkühlung wesentlich geringer. Dies bedeutet, dass ein solches Modell eine geringere Sensitivität aufweist. Es zeigt sich also, dass die Klimasensitivität aufgrund des Wasserdampf-feedbacks erhöht wird, in Übereinstimmung mit (2.25) und (2.26). Figur 2.12 zeigt auch, dass die heutigen Klimamodelle diesen Effekt quantitativ korrekt wiedergeben.

2.4.3 Wolkenfeedback

Die Modellierung der Wolkendecke gehört immer noch zu den grössten Herausforderungen in der Klimamodellierung und in der Abschätzung künftiger Temperaturen. Ein grundlegender Aspekt der Problematik ist in Fig. 2.13 ersichtlich. Sie zeigt in sehr vereinfachter Form mögliche Rückkoppelungsmechanismen, die sowohl positiv als auch negativ sein können, da die Wolken sowohl die kurzwellige Strahlung (via die Albedo), wie auch die langwellige Strahlung beeinflussen.



Figur 2.13: Wolken-feedback loops. Das Vorzeichen ist abhängig von der Lage und Beschaffenheit der Wolken. Niedrige Wolken beeinflussen die kurzwellige Strahlung via Albedo, hohe Wolken hingegen die langwellige Ausstrahlung.

Eine globale Abschätzung der Wirkung der Wolken ist in Tab. 2.3 gegeben: der gemittelte Effekt der globalen Wolkenbedeckung ist eine *Abkühlung*, das heisst die Wirkung auf die Albedo dominiert. Die Abschätzung in Tab. 2.3 liefert für das *forcing* bezogen auf die Änderung der Wolkenbedeckung, unter der Annahme einer mittleren Wolkenbedeckung von 60%, einen Wert von etwa

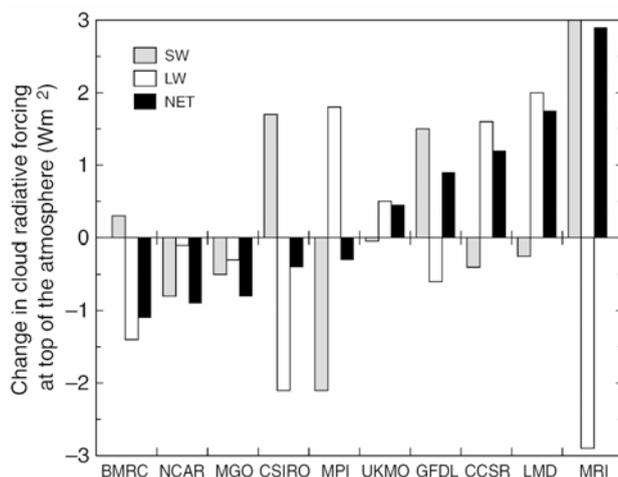
$$\frac{\Delta W}{\Delta \text{Wolken}} \approx -\frac{17 \text{ Wm}^{-2}}{60 \%} \approx -0.3 \text{ Wm}^{-2} / \% \quad . \quad (2.27)$$

Eine Zunahme der Wolkendecke um etwa 12% würde also eine Verdoppelung der CO₂ Konzentration gerade kompensieren.

	Mittel	ohne Wolken	mit Wolken
langwellige Strahlung	234	266	+31
absorbierte kurzwellige Strahlung	239	288	-48
netto Strahlung	5	22	- 17
Albedo	30%	15%	15%

Tabelle 2.3: Abschätzung der Strahlungsänderung in Wm⁻² aufgrund der globalen Wolkenbedeckung (aus Hartmann, 1994, *Global Physical Climatology*, Academic Press, 411 p.).

Bei den heutigen Klimamodellen herrscht aber bezüglich des Wolkenfeedbacks noch keine Konsistenz, wie in Fig. 2.14 gezeigt wird. Dabei wird zwischen den kurz- und langwelligen Effekten unterschieden, die auf die Veränderungen der niedrigen (Albedo), bzw. hohen (Emissivität) Wolken in die sen Modellen schliessen lassen. Betrachtet man nur die Netto-Effekte, könnte man schliessen, dass eher eine leicht abkühlende Wirkung bis eine signifikante Erwärmung durch Veränderung der Wolkenbedeckung für 2×CO₂ resultiert. Die Betrachtung der wellenlängenabhängigen Strahlungsbeiträge deutet darauf hin, dass dieser Schluss verfrüht ist, sind doch die Unterschiede noch zu gross und nicht einmal im Vorzeichen konsistent.



Figur 2.14: Änderung der Strahlungsbilanz an der Tropopause aufgrund von Änderungen der Wolkenbedeckung verursacht durch die Verdoppelung von CO₂, berechnet mit 10 AGCMs gekoppelt mit Ozeandeckschichten (Kategorie 3/2 in Tab. 2.1). SW, und LW bezeichnen short wave und long wave radiation. Das Vorzeichen des netto feedbacks ist in den Simulationen nicht einheitlich bestimmt: einige Modelle weisen einen insgesamt negativen, andere einen verstärkt positiven feedback auf. (Figur aus IPCC, 2001, Kapitel 7)

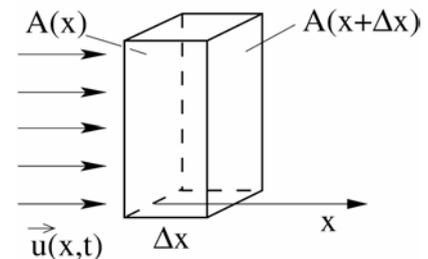
3 Advektion, Diffusion und Konvektion

Der Transport von Energie und Spurenstoffen geschieht in der Natur durch drei Prozesse: *Advektion*, *Diffusion* und *Konvektion*. Diese drei Prozesse führen zu Flüssen von Materie und Energie, deren formelmässige Darstellung in der Kontinuumsmechanik hergeleitet wird. Advektion kommt durch eine vorliegende Strömung zustande, die Stoffe und Energie transportiert. Die Diffusion ist ein zufälliger Prozess, der immer stattfindet, und nur unter gewissen Bedingungen zu Netto-Transport führt. Konvektion entsteht durch Instabilitäten in flüssigen oder gasförmigen Systemen. Diese Instabilitäten lösen dann ihrerseits Strömungen aus.

Diese Transportprozesse, und deren Darstellung in Modellen sind fundamental im Klimasystem und manifestieren sich als z.B. Wärmetransport in der Atmosphäre, Ausbreitung von Spurenstoffen im Ozean, Salztransport im Ozean, etc.

3.1 Advektion

Zur Herleitung der Formulierung von advektiven Flüssen von Grössen im Klimasystem betrachten wir zuerst den 1-dimensionalen Fall, der in Fig. 3.1 dargestellt ist. Dabei soll eine Strömung $\vec{u}(x, t)$ herrschen, die die betrachtete Grösse transportiert. Das Fluid (Gas, Luft, Wasser) bewegt sich durch eine ortsfeste Kontrollfläche $A(x)$. Die zu transportierende Grösse (Masse, Energie, Impuls, Spurenstoffe) soll als Konzentration $C(x, t)$ gegeben sein, das heisst die Grösse bezieht sich auf eine Volumeneinheit.



Figur 3.1: Strömung entlang der x-Achse

Die Strömung überstreicht in einem kleinen Zeitintervall Δt das Volumen $A \cdot \Delta x$. Somit beträgt die gesamte transportierte Grösse

$$A \cdot \Delta x \cdot C \quad .$$

Der Fluss der Grösse, bezogen auf die Fläche A und die Zeit, wird als *Flussdichte* bezeichnet. Sie beträgt

$$F = \frac{A \cdot \Delta x \cdot C}{A \cdot \Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot C = u \cdot C \quad .$$

In 3 Dimensionen beträgt die *advective Flussdichte* einer skalaren Grösse C in einer Strömung $\vec{u}(\vec{x}, t)$

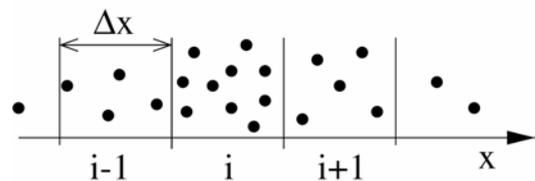
$$\vec{F} = \vec{u} \cdot C \quad . \quad (3.1)$$

Der Fluss ist ein Vektor, der entlang der Strömung gerichtet ist. Als Beispiele nennen wir folgende Flüsse:

Bezeichnung	advektiver Fluss
advektiver Massefluss	$\vec{F} = \vec{u} \cdot \rho$
advektiver Wärmefluss	$\vec{F} = \vec{u} \cdot \rho \cdot c \cdot T$
advektiver Salzfluss	$\vec{F} = \vec{u} \cdot S$
adv. Fluss der x-Komponente des Impulses	$\vec{F} = \vec{u} \cdot u_x$

3.2 Diffusion

Diffusionsprozesse kommen aufgrund der thermischen Bewegung der Moleküle (Brown'sche Bewegung) zustande und sind nur statistisch beschreibbar. Makroskopisch äussert sich dies in einer Parametrisierung, wie wir unten sehen werden. Wir nehmen wiederum den 1-dimensionalen Fall an und teilen die x-Achse in Zellen der Breite Δx auf, in denen sich die Moleküle befinden (Fig. 3.2).



Figur 3.2: Modell der 1-dimensionalen Diffusion

Die Moleküle sind wegen der Temperatur T in dauernder zufälliger Bewegung. Die Teilchendichte ist $\rho(x)$. Die zufällige Bewegung beschreiben wir durch eine Wahrscheinlichkeit p , dass ein Teilchen von Zelle i nach Zelle $i+1$ springt. Wir nehmen weiter an, dass die Diffusion ein isotroper Prozess ist (dies ist jedoch in der Natur nicht immer der Fall). Somit ist die Wahrscheinlichkeit p weder richtungs- noch ortsabhängig.

Wir bestimmen nun den Fluss von Masse an der Zellgrenze $i/i+1$ für ein Zeitintervall Δt . Von Zelle i springen $p \cdot \rho(x_i) \cdot \Delta x$ Teilchen nach rechts, und von Zelle $i+1$ springen $p \cdot \rho(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x$ nach links. Somit ist die diffusive Flussdichte der Masse gegeben durch

$$F = \frac{p \cdot \rho(x_i) \cdot \Delta x - p \cdot \rho(x_i + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta t} = -\frac{p \cdot (\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\rho(x_i + \Delta x) - \rho(x_i)}{\Delta x}$$

Der Grenzübergang $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, $(\Delta x)^2 / \Delta t = \text{konst}$ führt zu

$$F = -\left(\frac{p \cdot (\Delta x)^2}{\Delta t}\right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = -K \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.2)$$

Die Grösse K heisst *Diffusionskonstante* und hat die Masseinheit $[m^2 s^{-1}]$. Die Herleitung zeigt, dass die Diffusionskonstante Prozesse auf der nicht aufgelösten molekularen Längenskala parametrisiert.

Aus (3.2) folgt, dass *netto* diffusive Flüsse nur bei Anwesenheit von Konzentrationsgradienten, im Falle von (3.2) der Masse, entstehen. Brutto-Flüsse sind wegen der zufälligen Bewegung jedoch stets vorhanden.

Die Verallgemeinerung von (3.2) auf 3 Dimensionen und eine Konzentration C einer beliebigen Grösse, liefert

$$\vec{F} = -K \cdot \nabla C, \quad (3.3)$$

wobei ∇ der Gradientoperator ist, und K eine isotrope Diffusionskonstante (Skalar) ist. Der Gradientoperator ist gegeben durch

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

und macht aus einem Skalar $\Phi(x,y,z)$ einen Vektor, der in die Richtung des stärksten Anstiegs der Fläche $z = \Phi(x,y,z)$ zeigt. Beispiele diffusiver Flüsse sind:

Bezeichnung	diffusiver Fluss
diffusiver Massefluss	$\vec{F} = -K \cdot \nabla \rho$
diffusiver Wärmefluss	$\vec{F} = -K \cdot \rho \cdot c \cdot \nabla T = -\lambda \cdot \nabla T$
diffusiver Salzfluss	$\vec{F} = -K \cdot \nabla S$
diff. Fluss der y-Komp. des Impulses	$\vec{F} = -K \cdot \nabla u_y$

3.3 Konvektion

Konvektion tritt dann auf, wenn potentielle Energie durch eine Strömung freigesetzt werden kann. Befindet sich z. B. eine wärmere Luftschicht unter einer kälteren, so findet ein diffusiver Wärmefluss $-K \cdot \partial T / \partial z > 0$, dh. von unten gegen oben statt. Im Schwerfeld ist eine solche Schichtung jedoch instabil, das heisst ein Austausch des warmen Luftpaketes am Boden mit dem kälteren Luftpaket oben liefert potentielle Energie. Die Instabilität erzeugt also eine innere Strömung, die zum Ausgleich der Temperaturdifferenzen führt. Diese Strömung kann laminar oder turbulent sein, und man nennt sie *freie Konvektion*. Durch diesen Austausch wird das Fluid gemischt, bis keine potentielle Energie mehr freigesetzt werden kann. Für kleine vertikale Distanzen bedeutet das, dass dann die Temperaturverteilung uniform ist.

In der Natur tritt freie Konvektion in der planetaren Grenzschicht auf, wo sich im Laufe des Tages durch die Erwärmung des Bodens Instabilitäten aufbauen können. Sie treten auch an der Oberfläche des Ozeans auf, wo durch Wärmeabgabe an die Luft die Dichte des Wassers vergrössert wird, im Bereich von Meereis, denn die Bildung von Meereis führt zu einer Aufkonzentration des Salzgehaltes im Wasser, und auf molekularen Skalen, wo die Diffusionskonstante von Wärme etwa 100 mal grösser ist als diejenige von Salz (*salt fingers*). In bodennahen Schichten der Atmosphäre und in der hohen Breiten, und an Küstenrändern des Ozeans sind die konvektiven Flüsse äusserst wichtig für die Energie- und Stoffbilanzen.

Die durch Konvektion angetriebene Strömung ist zu klein-skalig für die Modellierung. In der Praxis der Modellierung wird die Wassersäule im Ozean, bzw. die Atmosphäre auf Instabilitäten geprüft. Falls solche diagnostiziert werden, tritt ein Konvektionsschema in Kraft, das entweder eine massen- und energierhaltende Mischung durchführt, oder es werden konvektive Flüsse mit entsprechend hohen Diffusionskonstanten parametrisiert, gemäss

$$\bar{F}_{\text{konv}} = -K_{\text{konv}} \cdot \nabla C, \quad (3.3)$$

wobei $K_{\text{konv}} = f(\rho, \partial\rho/\partial z)$, und etwa 10^8 bis 10^9 mal grösser ist als die molekulare Diffusion ist. Die konvektive Diffusionskonstante ist also abhängig von der vertikalen Schichtung des Wassers oder der Luft.

3.4 Advektions-Diffusionsgleichung und Kontinuitätsgleichung

Nachdem nun die Flüsse parametrisiert sind, können wir Stoff- und Energiebilanzen formulieren. Bilanzen sind Erhaltungssätze von betrachteten Grössen. Das erste Beispiel war das EBM, das in Gleichung (2.1) vorgestellt wurde. Wir stellen nun eine Erhaltungsgleichung für die Grösse C (wiederum bezogen auf ein Einheitsvolumen) auf und beginnen mit einer einzigen Dimension x (Fig. 3.3). Wir wählen ein fixes Kontrollvolumen $A \cdot \Delta x$, in dem die Bilanz erstellt wird. Die Grösse, deren Menge pro Volumeneinheit [kg/m^3 , mol/m^3 , ...] durch C beschrieben wird, ändert sich aufgrund der unterschiedlichen Zuflüsse zum ortsfesten Kontrollvolumen und Quellen und Senken innerhalb des Kontrollvolumens gemäss

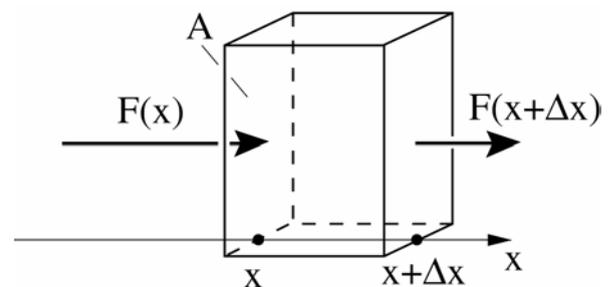


Figure 3.3: Ortsabhängiger Fluss in einer Dimension

$$\frac{\partial}{\partial t}(C \cdot \Delta V) = F(x) \cdot A - F(x + \Delta x) \cdot A + P \cdot \Delta V, \quad (3.4)$$

wobei F der Fluss der Grösse C ist, und P die *Netto-Quelldichte* (dh. Quellen minus Senken pro Volumeneinheit) der Grösse C darstellt. Einsetzen von (3.1) und (3.2), und Division durch ΔV ergibt

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{C(x + \Delta x) \cdot u(x + \Delta x) - C(x) \cdot u(x)}{\Delta x} + \frac{K \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - K \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} + P,$$

und mit dem Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(C \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) + P.$$

Dies führt in der Verallgemeinerung auf 3 Dimensionen zur *Advektions-Diffusionsgleichung*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \cdot \vec{u}) = \nabla \cdot (K \cdot \nabla C) + P \quad (3.5)$$

wobei $\nabla \cdot$ der Divergenzoperator ist. Er wirkt auf Vektoren und bildet das "Skalarprodukt" von ∇ mit dem Vektor:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} .$$

Der Spezialfall, wo die Masse (bzw. die Dichte) als Grösse C in (3.5) betrachtet wird, und Diffusion und Quellen/Senken nicht vorhanden sind, wird als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0 . \quad (3.6)$$

Physikalisch stellt (3.6) die Erhaltung der Masse dar. Die Gleichungen (3.5) und (3.6) sind Bilanzen, die die Grundlage zur mathematischen Beschreibung von Vorgängen im Klimasystem bilden. Deren Lösung ist die Aufgabe der Klimamodellierung.

3.5 Numerische Lösung der Advektions-Gleichung

3.5.1 Analytische Lösung

Wir betrachten den einfachsten Fall von (3.5) in einer Dimension, mit konstanter Fließgeschwindigkeit u , und ohne Diffusion, Quellen oder Senken. Dies führt zur 1-dimensionalen Advektionsgleichung

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = 0 . \quad (3.7)$$

Eine beliebige Funktion $C(x,t)$ ist eine allgemeine Lösung dieser Gleichung, wenn sie wie folgt geschrieben werden kann

$$C(x, t) = f(x - u \cdot t) , \quad (3.8)$$

wobei f eine beliebige Funktion ist. Als partielle Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit erfordert (3.7) eine Anfangsbedingung, die durch $f(x)$ gegeben ist.

Die Gleichung (3.7) beschreibt die konstante Bewegung der Funktion f ohne Veränderung der Form in Richtung der positiven x -Achse, wie dies in Fig. 3.4 dargestellt ist. Es handelt sich um eine dispersionsfreie Ausbreitung einer Störung entlang der x -Achse und erinnert uns an eine Welle. Obwohl (3.7) nicht die klassische Wellengleichung ist, kann man zeigen, dass sie Teil der Wellengleichung ist.

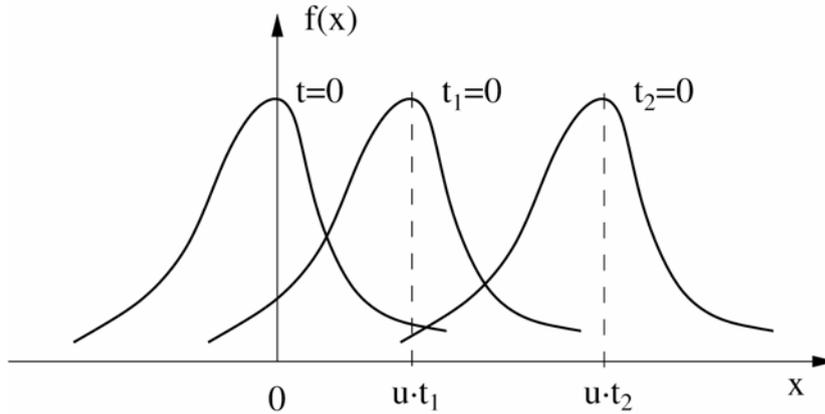


Figure 3.4: Transport der Funktion $f(x)$ entlang der positiven x -Achse in einer konstanten Strömung der Geschwindigkeit u unter Beibehaltung der Form.

Dazu stellen wir fest, dass eine Störung, die sich nach links bewegt, durch folgende partielle Differentialgleichung (PDGL) gegeben ist:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = 0 .$$

Wir suchen nun eine PDGL, deren Lösung sich sowohl in positiver, wie auch in negativer Richtung der x -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit fortpflanzt. Eine solche ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) C = 0 .$$

Die Reihenfolge der Operatoren in der Klammer kann vertauscht werden. Durch Auflösen der Klammern und u =konstant, findet man

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - u^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 . \quad (3.9)$$

Dies ist die klassische *Wellengleichung* mit konstanter Phasengeschwindigkeit u . Wir geben kurz noch die Lösung der Advektionsgleichung (3.7) zur Anfangsbedingung

$$C(x, 0) = A \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \quad (3.10)$$

an. (3.10) umfasst somit sowohl die Funktion *cos* (Realteil), als auch die Funktion *sin* (Imaginärteil). Nach (3.8) ist deshalb die allgemeine Lösung von (3.7)

$$C(x, t) = A \cdot e^{i \cdot k \cdot (x - u \cdot t)} . \quad (3.11)$$

(3.11) stellt eine ebene Welle dar, wobei folgende Größen die Welle charakterisieren:

Bezeichnung	Grösse	Zusammenhang
Wellenzahl	k	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Wellenlänge	λ	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{u}{v}$
Kreisfrequenz	ω	$\omega = \frac{2\pi}{T}$
Periode	T	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{v}$
Frequenz	v	$v = \frac{1}{T} = \frac{u}{\lambda}$

3.5.2 Numerische Lösung

Wir lösen nun die 1-dimensionale Advektionsgleichung (3.7) numerisch, indem wir (3.7) in Raum und Zeit wie folgt diskretisieren:

$$\text{räumliche Diskretisierung:} \quad x = m \cdot \Delta x \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{zeitliche Diskretisierung:} \quad t = n \cdot \Delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir wählen die Bezeichnung

$$C(x, t) = C(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) = C_{m,n} \quad (3.12)$$

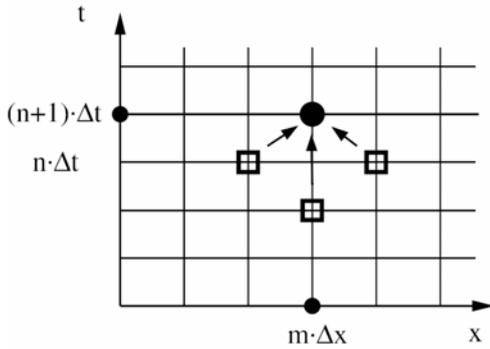
für die Werte der Lösung an den Raum-Zeit Gitterpunkten. Die Anwendung von zentralen Differenzen auf die Gleichung (3.7) ergibt

$$\frac{C_{m,n+1} - C_{m,n-1}}{2 \cdot \Delta t} + u \cdot \frac{C_{m+1,n} - C_{m-1,n}}{2 \cdot \Delta x} = 0 \quad (3.13)$$

Die Auflösung nach dem Wert zur aktuellsten Zeit $(n+1) \cdot \Delta t$ liefert

$$C_{m,n+1} = C_{m,n-1} - \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot (C_{m+1,n} - C_{m-1,n}) \quad (3.14)$$

Dieses Schema heisst CTCS-Schema (*centred in time, centred in space*). Zur Bestimmung des Wertes der Lösung C zu einem Zeitpunkt wird also Information von zwei früheren Zeitpunkten aus der räumlichen Umgebung verwendet. Dies ist in Fig. 3.5 in einem Raum-Zeit Gitter schematisch dargestellt. Aufgrund der Anordnung der "Prädiktoren" nennt man dieses Schema *leap-frog scheme*. Es ist zu beachten, dass beim ersten Zeitschritt dieses Schema nicht funktioniert, und deshalb für diesen Zeitschritt Euler vorwärts gewählt werden muss. Dieses Schema wird oft auch als FTCS-Schema (*forward in time, centred in space*) genannt.



Figur 3.5: Darstellung des leap-frog Schemas im Raum-Zeit Gitter.

Wir wollen nun die Eigenschaften des leap-frog Verfahrens untersuchen. Dabei nehmen wir als Anfangsbedingung die ebene Welle (3.10) an. Da wir die analytische Lösung kennen, können wir die diskretisierte Form direkt angeben:

$$C_{m,n} = B^{n \cdot \Delta t} \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x} , \quad (3.15)$$

wobei die Zeitabhängigkeit in einer speziellen Form geschrieben ist (durch geeignete Wahl von B kann 3.11 jederzeit gebildet werden). Wir setzen nun (3.15) in (3.14) ein und erhalten

$$(B^{\Delta t})^2 + 2 \cdot i \cdot \sigma \cdot (B^{\Delta t}) - 1 = 0 , \quad (3.16)$$

eine quadratische Gleichung in $B^{\Delta t}$ mit

$$\sigma = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot \sin(k \cdot \Delta x) , \quad (3.17)$$

deren Lösung gegeben ist durch

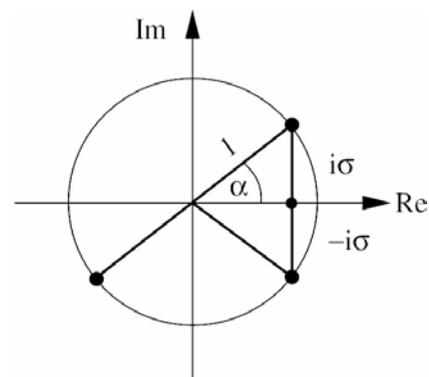
$$B^{\Delta t} = -i \cdot \sigma \pm \sqrt{1 - \sigma^2} . \quad (3.18)$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

Stabiler Fall: $|\sigma| \leq 1$:

Die Lösung von $B^{\Delta t}$ hat Betrag 1, liegt also auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene (Fig. 3.6). Aus der Figur folgt

$$B^{\Delta t} = \begin{cases} e^{-i \cdot \alpha} \\ e^{i \cdot (\alpha + \pi)} \end{cases} , \quad \sin \alpha = \sigma . \quad (3.19)$$



Figur 3.6: Darstellung der Lösung (3.18)

Somit erhalten wir für die Lösung

$$\begin{aligned} C_{m,n} &= \left(M \cdot e^{-i \cdot \alpha \cdot n} + E \cdot e^{i \cdot (\alpha + \pi) \cdot n} \right) \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x} , \\ C_{m,0} &= (M + E) \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x} . \end{aligned} \quad (3.20a,b)$$

Nach (3.10) muss $M + E = A$ sein, und die diskrete Lösung kann folgendermassen geschrieben werden:

$$C_{m,n} = \underbrace{(A - E) \cdot e^{i \cdot k \cdot (m \cdot \Delta x - \frac{\alpha \cdot n}{k})}}_P + \underbrace{(-1)^n \cdot E \cdot e^{i \cdot k \cdot (m \cdot \Delta x + \frac{\alpha \cdot n}{k})}}_N , \quad (3.21)$$

wobei P den physikalischen Mode, und N den numerischen Mode (*computational mode*) der Lösung bezeichnet. Beachte, dass N bei jedem Zeitschritt das Vorzeichen wechselt!

Nun muss noch E bestimmt werden. Für den ersten Zeitschritt haben wir

$$C_{m,1} = C_{m,0} - \frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (C_{m+1,0} - C_{m-1,0}) . \quad (3.22)$$

Die Konzentrationen zum Zeitpunkt $t = 0$ können mit (3.20b) ersetzt werden, womit folgt

$$C_{m,1} = A \cdot (1 - i \sin \alpha) \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x} = (A - E) \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x - i \cdot \alpha} - E \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x + i \cdot \alpha} .$$

Auflösen nach E und einsetzen in (3.21) ergibt schliesslich

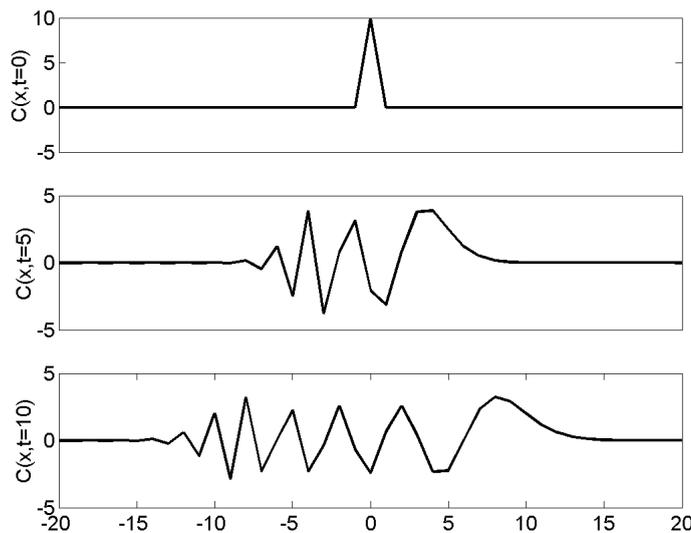
$$C_{m,n} = \underbrace{A \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot e^{i \cdot k \cdot (m \cdot \Delta x - \frac{\alpha \cdot n}{k})}}_P + \underbrace{(-1)^{n+1} \cdot A \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot e^{i \cdot k \cdot (m \cdot \Delta x + \frac{\alpha \cdot n}{k})}}_N . \quad (3.23)$$

Die Konvergenz von (3.23) nach (3.11) kann gezeigt werden. Es gilt nämlich

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma \rightarrow u \cdot k \cdot \Delta t , \quad (3.11)$$

und für $\Delta t \rightarrow 0$ ist $\sigma \ll 1$ und somit $\sigma = \sin \alpha \approx \alpha$. Also konvergiert (3.23) gegen

$$C_{m,n} \rightarrow \underbrace{A \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot e^{i \cdot k \cdot (x - u \cdot t)}}_P + \underbrace{(-1)^{n+1} \cdot A \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot e^{i \cdot k \cdot (x + u \cdot t)}}_N .$$



Figur 3.7: Auseinanderlaufen eines Wellenpakets und Erzeugung des numerischen Modes bei der Lösung der Advektionsgleichung mit CTCS.

Term P beschreibt die physikalische Lösung einer nach rechts laufenden ebenen Welle mit gedämpfter Amplitude; die Dämpfung verschwindet für $\Delta t \rightarrow 0$. Term N ist der *computational mode*, der nach links läuft und dessen Amplitude für $\Delta t \rightarrow 0$ verschwindet.

Die Advektionsgleichung (3.7) wurde für $u = 1$, $\Delta x = 1$, und $\Delta t = 0.1$, nach Schema (3.14) numerisch gelöst, wobei für den ersten Zeitschritt (3.22) verwendet wurde. Die Anfangsbedingung ist eine Auslenkung von 10 am Ursprung, die sich in der exakten Lösung in ihrer Form unverändert nach rechts fortpflanzen sollte. Die numerische Integration zeigt allerdings deutlich, dass sich zwar ein Paket nach rechts bewegt, jedoch auch ein numerischer Mode nach links auftritt, dessen Vorzeichen am jedem Gitterpunkt wechselt (Fig. 3.7). Der physikalische Mode ist zudem der *numerischen Dispersion* unterworfen, d.h. die Form verändert sich. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle ist in diesem Schema abhängig von der Wellenlänge, mit der Folge, dass ein ursprünglich lokalisiertes Wellenpaket langsam auseinanderfließt.

Instabiler Fall: $|\sigma| > 1$:

$$B^{\Delta t} = -i \cdot (\sigma \pm S) \quad , \quad S = \sqrt{\sigma^2 - 1} > 0 \quad .$$

Falls $\sigma > 1$, dann ist $\sigma + S > 1$, und somit $|(B^{\Delta t})^n| \rightarrow \infty$. Für $\sigma < -1$ ist $\sigma - S < -1$ und $|(B^{\Delta t})^n|$ divergiert ebenfalls. Die Lösung nimmt zeitlich exponentiell zu, das heißt sie *explodiert*.

Das bedeutet nun, dass die numerische Lösung mit Hilfe von Schema (3.14) nur unter der Bedingung von $|\sigma| < 1$ konvergiert. Somit muss gelten

$$\left| \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot \sin(k \cdot \Delta x) \right| \leq 1 \quad .$$

Damit diese Bedingung für alle Wellenlängen zutrifft, muss folgende wichtige Bedingung zutreffen:

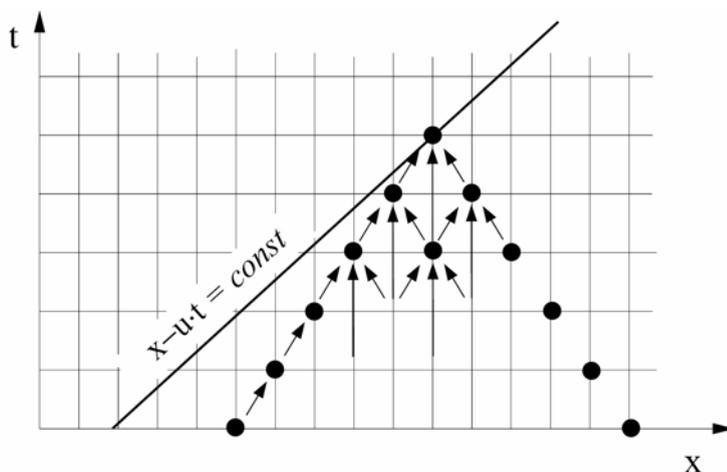
$$\left| \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad (3.24)$$

Bedingung (3.24) ist das **Courant-Friedrichs-Levy Kriterium**, das notwendigerweise erfüllt sein muss, um bei der Verwendung von zentralen Differenzen eine stabile numerische Lösung zu erhalten. Es wird kurz als **CFL-Kriterium** bezeichnet.

Das CFL-Kriterium stellt einen Zusammenhang her zwischen der Geschwindigkeit, mit welcher Signale transportiert werden, und der notwendigen Auflösung des Raum-Zeit-Gitters. Bei hohen Transportgeschwindigkeiten müssen bei gegebener räumlicher Auflösung entsprechend kleine Zeitschritte gewählt werden. Das ist ein bekanntes und unangenehmes Phänomen in der Klimamodellierung, dass nämlich vergleichsweise hohe Strömungsgeschwindigkeiten (zum Beispiel der Jet-Stream in der Atmosphäre, oder Randströme im Ozean) den Zeitschritt via CFL-Kriterium stark einschränken.

Wir werden numerische Schemata kennenlernen, die das CFL-Kriterium nicht erfüllen müssen, und deshalb in schwierigen Fällen, wo der Zeitschritt allzu stark verkleinert werden müsste, zur Anwendung kommen.

Das CFL-Kriterium ist eine Folge der Wellenausbreitung, die in der Advektionsgleichung möglich ist, und des Einflussbereichs des gewählten numerischen Schemas. Dies ist in Fig. 3.8 in einem Raum-Zeit-Gitter dargestellt. Der Raumzeitpunkt (x,t) wird von einer Welle, die von der Anfangsbedingung ausgeht, erfasst. Die Welle pflanzt sich entlang ihrer *Charakteristik* mit konstanter Geschwindigkeit u fort. Die Charakteristik einer Welle ist der Ort konstanter Phase im Raum-Zeit Kontinuum. Das CFL-Kriterium ist die Forderung, wonach die Charakteristik, die durch den Raumzeitpunkt (x,t) verläuft, vom numerischen Schema jederzeit erfasst ist.



Figur 3.8: Abhängigkeitsgebiet des Schemas CTCS (3.14) und Charakteristik, die ausserhalb liegt, und somit das CFL-Kriterium verletzt.

Aus Figur 3.8 entnimmt man, dass die Steigung der Charakteristik grösser sein muss als die Steigung des Abhängigkeitsbereichs des angewandten numerischen Schemas, also

$$\frac{1}{u} \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1 .$$

Aus Fig. 3.8 ist ersichtlich, dass dies entweder durch Vergrössern von Δx , oder Verkleinern von Δt erreicht werden kann, wie dies auch direkt aus (3.24) folgt.

Analog kann mit Ansatz (3.15) für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

die mit dem FTCS-Schema numerisch gelöst wird, das entsprechende CFL-Kriterium hergeleitet werden. Dieses lautet

$$\frac{K \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2} .$$

3.6 Weitere Verfahren zur Lösung der Advektions-Gleichung

3.6.1 Euler vorwärts in t , zentrale Differenzen in x (FTCS)

Der numerische Mode in (3.21) entstand dadurch, dass zur Berechnung des neuen Zeitschritts zwei vorhergehende benötigt wurden. Eine Idee, den numerischen Mode zu unterdrücken wäre, für die Zeit ein Euler-vorwärts Verfahren zu wählen. Somit lautet die Gleichung (3.7) in diskretisierter Form

$$C_{m,n+1} = C_{m,n} - \frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (C_{m+1,n} - C_{m-1,n}) . \quad (3.25)$$

Mit dem Ansatz

$$C_{m,n} = B^{n \cdot \Delta t} \cdot e^{i \cdot k \cdot m \cdot \Delta x} , \quad (3.26)$$

erhalten wir

$$B^{\Delta t} = 1 - i \cdot \sigma = \sqrt{1 + \sigma^2} \cdot e^{-i \cdot \theta} . \quad (3.27)$$

wobei

$$\sigma = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot \sin(k \cdot \Delta x), \quad \tan \theta = \sigma .$$

Einsetzen von (3.27) in (3.26) liefert

$$C_{m,n} = A \cdot \left(1 + \left(\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(k \cdot \Delta x) \right)^{n/2} \cdot e^{i \cdot k \cdot (m \cdot \Delta x - \theta \cdot n/k)} .$$

Da die obige Klammer immer grösser als 1 ist, wächst die Amplitude mit der Zeit. Somit haben wir $|C_{m,n}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$; die Lösung "explodiert" mit diesem Schema.

3.6.2 Euler vorwärts in t , upstream in x (FTUS)

Das folgende numerische Schema berücksichtigt den physikalischen Vorgang in der einfachen Advektionsgleichung (3.7). Die Information kommt aus der negativen x -Richtung, und wird mit Geschwindigkeit u herantransportiert. Es liegt deshalb nahe, die örtliche Ableitung mit einem Schema zu diskretisieren, das dieser Situation Rechnung trägt. Anstatt zentrale Differenzen verwendet man hier Euler rückwärts. Anschaulicher ist in diesem Zusammenhang die Bezeichnung *upstream Verfahren*, da zur Berechnung der Ableitung nur Information von stromaufwärts verwendet wird. Falls $u > 0$ lautet die diskretisierte Form von (3.7) demnach

$$C_{m,n+1} = C_{m,n} - \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot (C_{m,n} - C_{m-1,n}) . \quad (3.28)$$

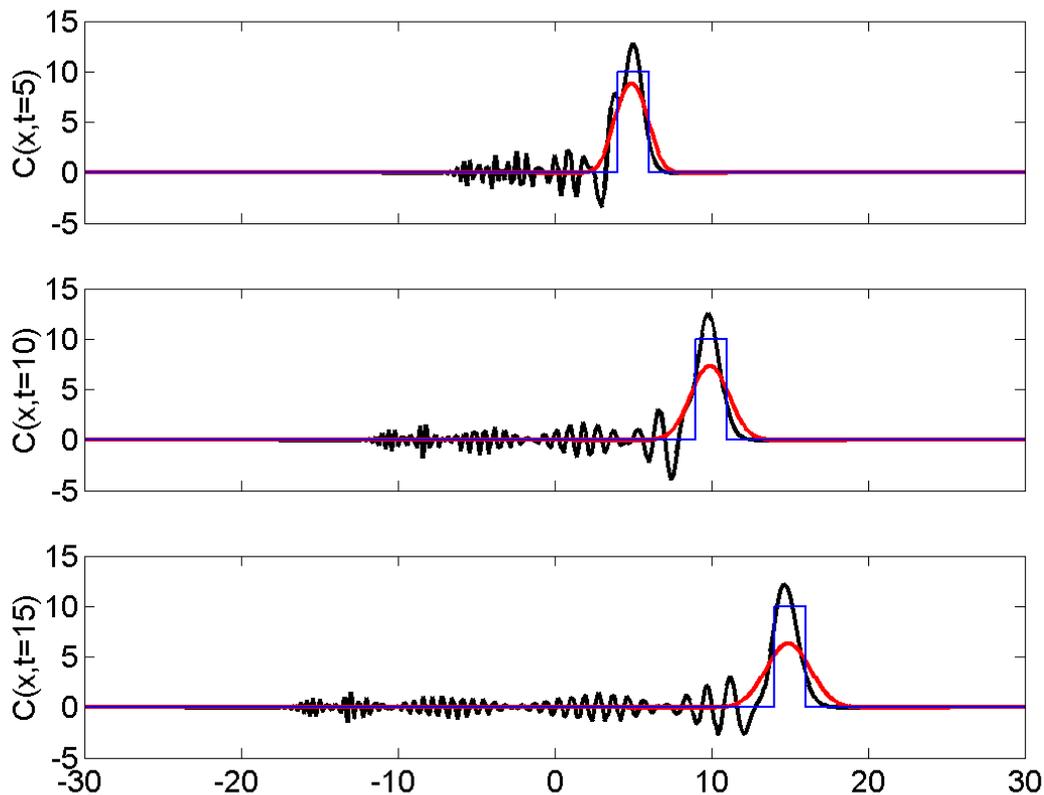
Einsetzen von Ansatz (3.26) und kürzen, ergibt

$$B^{\Delta t} = 1 - \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot \left(1 - e^{-i \cdot k \cdot \Delta x} \right). \quad (3.29)$$

Das numerische Verfahren bleibt stabil, falls $|B^{\Delta t}| \leq 1$. Man kann, ausgehend von (3.29), zeigen, dass dies für alle Wellenzahlen k dann erfüllt ist, wenn

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (3.30)$$

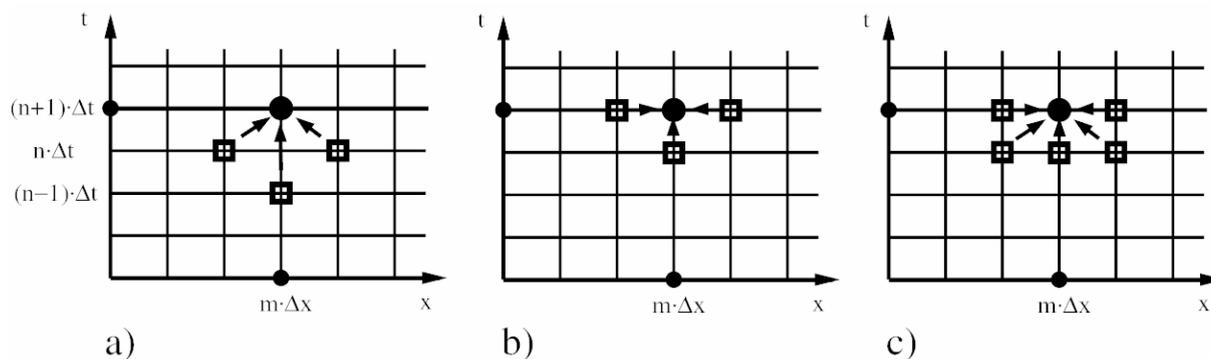
wenn also das CFL-Kriterium erfüllt ist. Das upstream-Verfahren hat den Nachteil einer relativ starken Dämpfung und Dispersion, wie dies in Fig. 3.9 sichtbar ist. Die Dämpfung nimmt im upstream Verfahren mit der Verkleinerung von Δt zu.



Figur 3.9: Vergleich der exakten Lösung (dünn) der Advektion eines Rechteckprofils mit verschiedenen numerischen Lösungen der Advektionsgleichung: zentrale Differenzen in t und x (CTCS, 3.13), bzw. upstream Verfahren (FTUS, 3.28). Dabei wurde $\Delta x=0.2$, $\Delta t=0.1$, und $u=1$ verwendet. Die Anfangsbedingung ist $C=1$ für $-1 \leq x \leq 1$, $C=0$ sonst. Der numerische Mode im Verfahren der zentralen Differenzen (3.13) ist offensichtlich. Das upstream Verfahren erzeugt keinen numerischen Mode, dafür sehr starke Dämpfung und Dispersion.

3.6.3 Implizites Schema

Oft ist die Erfüllung des CFL-Kriteriums nur möglich, falls extrem kurze Zeitschritte gewählt werden. Beispielsweise führen in typischen Ozeanmodellen die Flüsse aufgrund der hohen Diffusivitäten an Orten, wo die Isopyknen (Linien konstanter Dichte) steil sind, zu Zeitschritten von der Größenordnung Sekunden. Die Idee des impliziten Schemas ist, dass Ortsableitungen



Figur 3.10: Darstellung eines expliziten, und zweier impliziter numerischen Schemata. (a) leap-frog (3.13), (b) implizit, und (c) implizit-trapezoid (3.31).

zur neuen Zeit $(n+1) \cdot \Delta t$ bestimmt werden. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie dies in Fig. 3.10 im Raum-Zeit Gitter dargestellt ist.

Die Anwendung des implizit-trapezoid Verfahrens ergibt die diskretisierte Form von (3.7)

$$\frac{C_{m,n+1} - C_{m,n}}{\Delta t} + u \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{C_{m+1,n+1} - C_{m-1,n+1}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{m+1,n} - C_{m-1,n}}{2 \cdot \Delta x} \right) = 0, \quad (3.31)$$

wobei die Klammer den Mittelwert der ersten Ortsableitung zum Zeitpunkt $(n+1) \cdot \Delta t$ und $n \cdot \Delta t$ darstellt. Wiederum setzen wir Ansatz (3.26) in (3.31) ein und erhalten, nach Umformen

$$B^{\Delta t} = \frac{1 - i \cdot \sigma}{1 + i \cdot \sigma}, \quad \sigma = \frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \sin(k \cdot \Delta x). \quad (3.32)$$

Für beliebige σ ist $|B^{\Delta t}| = 1$. Dieses Schema ist somit ohne Einschränkung an Zeitschritt und räumliche Gitterauflösung stabil. Das CFL-Kriterium muss hier nicht erfüllt sein. Es tritt auch keine Dämpfung der Amplitude auf. Als Nachteil erweist sich jedoch, dass die Phasengeschwindigkeiten von Wellen verzerrt sind.

Implizite Schemen erfordern in der Regel eine Matrixinversion. Dazu fasst man die Lösung an den Stellen $m \cdot \Delta x$ zum Zeitpunkt n als Vektor zusammen:

$$\mathbf{C}_n = (C_{1,n}, C_{2,n}, C_{3,n}, \dots, C_{M,n}). \quad (3.33)$$

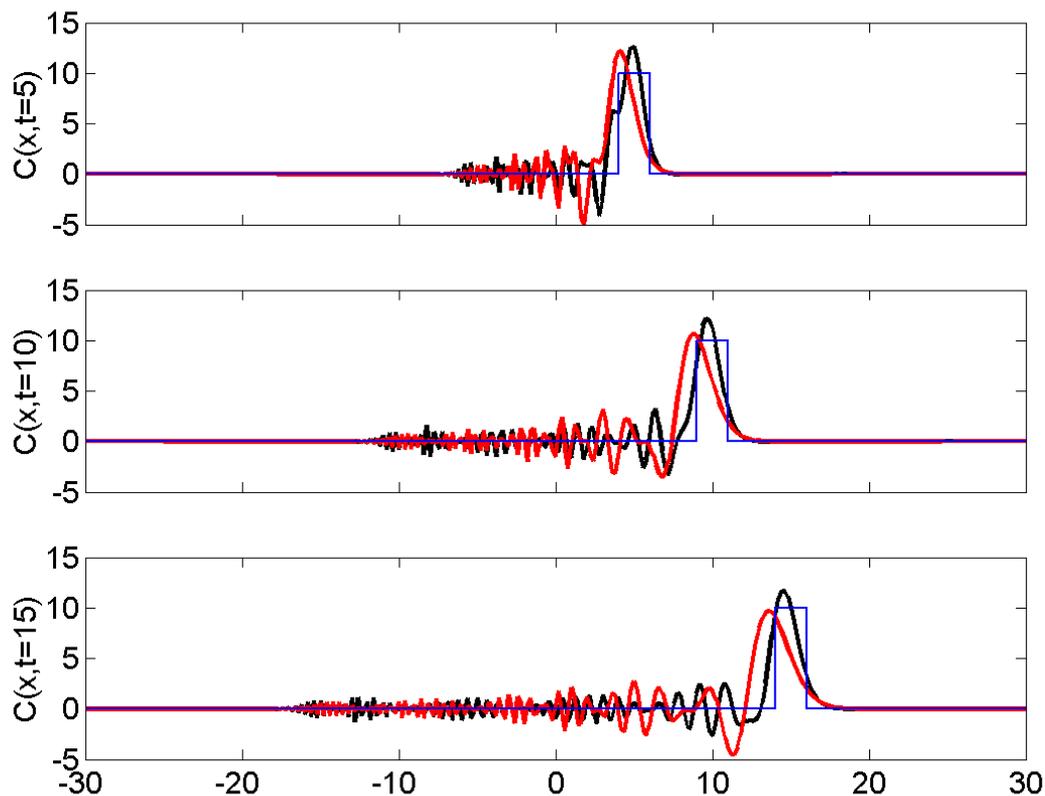
Die diskretisierte Form (3.31) kann dann als lineares Gleichungssystem geschrieben werden:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{C}_n + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \mathbf{C}_{n+1} = 0. \quad (3.34)$$

Die Lösung zum Zeitpunkt $n+1$ ist gegeben durch

$$\mathbf{C}_{n+1} = -(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \mathbf{C}_n, \quad (3.35)$$

das heisst zu jedem Zeitschritt wird die Lösung an allen Ortsgitterpunkten durch die Inversion



Figur 3.11: Vergleich der exakten Lösung (dünn) mit den numerischen Lösungen der Advektionsgleichung mit Hilfe des implizit-trapezoid Verfahrens (3.31) mit zwei unterschiedlichen Zeitschritten. Dabei wurde $\Delta t=0.1$, und $\Delta t=0.5$ mit $\Delta x=0.2$, und $u=1$ verwendet. Die Anfangsbedingung ist $C=1$ für $-1 \leq x \leq 1$, $C=0$ sonst. Beide Schemen zeigen eine recht gute Darstellung des Hauptmaximums, mit nachfolgenden numerischen Moden. Das Verfahren mit dem grossen Zeitschritt zeigt eine deutlichere Verzögerung des Hauptmaximums.

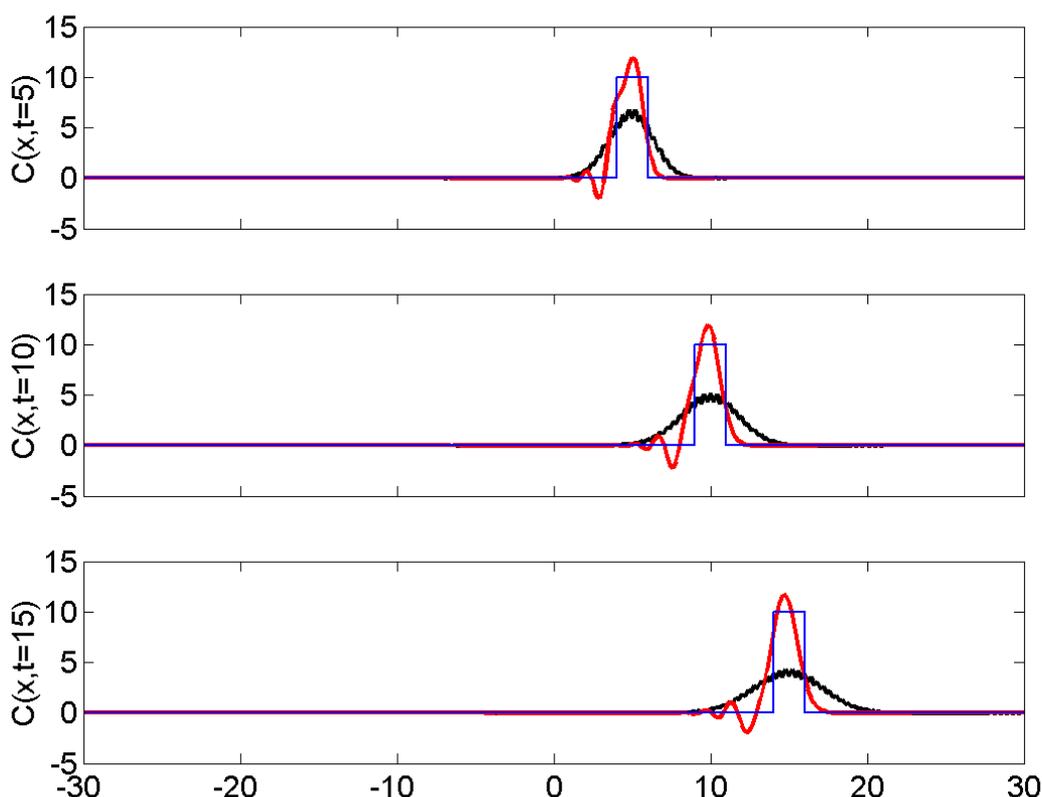
eines linearen Gleichungssystems gelöst. Da die zugehörigen Matrizen meist schwach besetzt sind (Haupt- und beide Nebendiagonalen im Fall 3.31), ist die Lösung relativ einfach.

Die numerische Lösung mit dem impliziten Verfahren (3.31) für dieselben Parameter Δt und Δx und gleiche Anfangsbedingungen wie in Fig. 3.9, ist praktisch ununterscheidbar von der numerischen Lösung mit Verfahren (3.13). Der grosse Vorteil ist jedoch die Möglichkeit der beliebigen Vergrösserung des Zeitschritts mit geringer Einbusse der Qualität der numerischen Lösung (Fig. 3.11).

3.6.4 Lax Schema

Unter 3.6.1 wurde gezeigt, dass das Verfahren Euler vorwärts in t /zentrale Differenzen in x (FTCS) immer instabil ist. Die Idee im Lax-Schema ist nun, das FTCS-Verfahren durch eine Diffusion zu stabilisieren. Dies wird erreicht, indem in (3.25) anstatt $C_{m,n}$ nun der örtliche Mittelwert zwischen zwei benachbarten Punkten verwendet wird, also

$$C_{m,n+1} = \frac{1}{2} \cdot (C_{m+1,n} + C_{m-1,n}) - \frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (C_{m+1,n} - C_{m-1,n}) . \quad (3.36)$$



Figur 3.12: Vergleich der exakten Lösung (dünn) mit verschiedenen numerischen Lösungen der Advektionsgleichung: Lax Schema (3.36), bzw. Lax-Wendroff Schema (3.40). Dabei wurde $\Delta x=0.2$, $\Delta t=0.1$, und $u=1$ verwendet. Die Anfangsbedingung ist $C=1$ für $-1 \leq x \leq 1$, $C=0$ sonst. Das Lax Schema (3.36) zeigt starke Dämpfung und somit eine Unterschätzung der Gradienten. Das Lax-Wendroff Schema (3.42) überschätzt das Maximum und weist Nachschwingungen auf, jedoch ist die Darstellung der Gradienten wesentlich verbessert.

Das Verfahren (3.36) ist äquivalent zu (3.25) plus ein diffusiver Term, denn

$$C_{m,n+1} = C_{m,n} - \underbrace{\frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (C_{m+1,n} - C_{m-1,n})}_{(3.25)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (C_{m+1,n} - 2 \cdot C_{m,n} + C_{m-1,n})}_{D},$$

und Term D ist die diskretisierte Form eines Diffusionsterms

$$\text{Term D} = \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{C_{m+1,n} - 2 \cdot C_{m,n} + C_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \cong \Delta t \cdot \left(\frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot \Delta t} \right) \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (3.37)$$

Die Reduktion von Δx verringert also die Diffusion quadratisch. Jedoch ist Δx wegen dem CFL-Kriterium limitiert. Mit unserem gewohnten Ansatz (3.26) zur Prüfung der Stabilität des numerischen Verfahrens erhalten wir

$$B^{\Delta t} = \cos(k \cdot \Delta x) - \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot i \cdot \sin(k \cdot \Delta x). \quad (3.38)$$

Das Verfahren ist genau dann stabil, wenn

$$\left| B^{\Delta t} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (3.39)$$

also das klassische CFL-Kriterium erfüllt ist. Die numerische Lösung ist in Fig. 3.12 dargestellt; die Parameter sind identisch mit Fig. 3.9. Je kleiner der Zeitschritt gewählt wird, desto stärker wirkt sich die Diffusion des ersten Terms in (3.36) aus, und das Schema wird unbrauchbar.

Das Lax Schema zeigt keinen numerischen Mode. Der deutliche Nachteil des Schemas ist aber eine recht grosse Dämpfung von Gradienten.

3.6.5 Lax-Wendroff Schema

Das Lax-Wendroff Schema gibt Gradienten wesentlich besser wieder als das Lax Schema. Das Lax-Wendroff Verfahren erhält man durch die Kombination des Lax Schemas für einen Zwischenschritt mit dem Euler vorwärts in t /zentrale Differenzen in x (Schema 3.6.1). Der Zwischenschritt wird berechnet aus

$$\tilde{C}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (C_{m+1,n} + C_{m,n}) - \frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (C_{m+1,n} - C_{m,n}), \quad (3.40)$$

mit dem eigentlichen Zeitschritt

$$C_{m,n+1} = C_{m,n} - \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \cdot (\tilde{C}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - \tilde{C}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}), \quad (3.41)$$

Durch einsetzen von (3.40) in (3.41) erkennen wir, wie das für sich allein instabile Schema (3.6.1) stabilisiert wird:

$$C_{m,n+1} = \underbrace{C_{m,n} - \frac{u \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot (C_{m+1,n} - C_{m-1,n})}_{=(3.25)} + \underbrace{\frac{u^2 \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (\Delta x)^2} \cdot (C_{m+1,n} - 2 \cdot C_{m,n} + C_{m-1,n})}_{D}. \quad (3.42)$$

Term D in (3.42) ist ein Diffusionsterm, denn

$$\text{Term D} = \Delta t \cdot \frac{u^2 \cdot \Delta t}{2} \cdot \frac{C_{m+1,n} - 2 \cdot C_{m,n} + C_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \cong \Delta t \cdot \left(\frac{u^2 \cdot \Delta t}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (3.43)$$

Es ist zu beachten, dass die Diffusion schwach ist und mit Δt skaliert, das heisst für kleine Zeitschritte schwächer wird. Die numerische Lösung ist in Fig. 3.12 abgebildet; die Parameter sind identisch mit Fig. 3.9. Die Verkleinerung des Zeitschritts wirkt sich bei diesem Schema nicht auf die Form des Hauptmaximums aus, doch wird der nachfolgende oszillatorische Schwanz wesentlich länger.

Damit das Lax-Wendroff Verfahren stabil bleibt, muss das CFL-Kriterium (3.39) erfüllt sein.

3.7 Numerische Lösung der Advektions-Diffusions Gleichung

Wir betrachten nun die allgemeine Advektions-Diffusions Gleichung (3.5) in einer Dimension mit einem Quellterm proportional zu $C(x,t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + b \cdot C . \quad (3.44)$$

Dabei sind K , u und b Konstanten. Eine verallgemeinerte Formulierung der diskretisierten Form von (3.44) lautet

$$\frac{C_{m,n+1} - C_{m,n}}{\Delta t} = K \cdot \frac{\theta \cdot \nabla_x^2 C_{m,n+1} + (1-\theta) \cdot \nabla_x^2 C_{m,n}}{(\Delta x)^2} + u \cdot \frac{\nabla_x C_{m,n}}{2 \cdot \Delta x} + b \cdot C_{m,n} . \quad (3.45)$$

wobei zwei Differenzenoperatoren verwendet wurden, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \nabla_x C_{m,n} &\equiv C_{m+1,n} - C_{m-1,n} , \\ \nabla_x^2 C_{m,n} &\equiv C_{m+1,n} - 2 \cdot C_{m,n} + C_{m-1,n} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

In (3.45) ist θ ein freier Parameter, der den "Grad der Implizität" des Schemas bestimmt. Für $\theta = 0$ ist das Verfahren explizit, d.h. es kommt auf der rechten Seite von (3.45) kein Zeitindex $n+1$ vor. Das explizite Verfahren ist stabil, falls $K \cdot \Delta t / (\Delta x)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Falls $u = b = 0$, und $\theta = \frac{1}{2}$ wird (3.45) als *Crank-Nicholson Verfahren* bezeichnet, das absolut stabil ist. Allgemein gilt für die Stabilität von (3.45)

$$\frac{K \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2 \cdot \theta} \quad \text{für } 0 \leq \theta < \frac{1}{2} , \quad (3.47)$$

und absolut stabil für $\theta \geq \frac{1}{2}$.

3.8 Numerische Diffusion

Bei der Simulation der Ausbreitung von Spurenstoffen oder anderen Signalen, wie das Eindringen von Wärme in den Ozean, muss auf die numerische Diffusion, die in den meisten Verfahren auftritt, geachtet werden. Besonders offensichtlich war sie in den Schemen (3.36) und (3.41), aber auch deutlich sichtbar in Fig. 3.9 (Verfahren 3.28). Um die Abhängigkeit dieses numerischen Artefakts von der Wahl der Diskretisierung zu untersuchen, betrachten wir nochmals die 1-dimensionale Advektionsgleichung (3.7), die einen Anteil der allgemeineren Wellengleichung darstellt:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - u^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0. \quad (3.49)$$

Wir diskretisieren nun in Raum (Index m) und Zeit (Index n), und schreiben folgende Taylor-entwicklungen für den Zeit- und den Raumschritt:

$$\begin{aligned} C_{m,n+1} &= C_{m,n} + \frac{\partial C_{m,n}}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 C_{m,n}}{\partial t^2} \cdot (\Delta t)^2 + \dots, \\ C_{m+1,n} &= C_{m,n} + \frac{\partial C_{m,n}}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 C_{m,n}}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.50)$$

In (3.50) lösen wir nach den ersten Ableitungen auf, setzen diese in (3.48) ein, und erhalten

$$\frac{C_{m,n+1} - C_{m,n}}{\Delta t} + u \cdot \frac{C_{m+1,n} - C_{m,n}}{\Delta x} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 C_{m,n}}{\partial t^2} \cdot \Delta t - \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 C_{m,n}}{\partial x^2} \cdot \Delta x - \dots = 0. \quad (3.51)$$

Jede Lösung von (3.48) ist auch Lösung von (3.49). Das heisst, die zweite zeitliche Ableitung in (3.51) kann ersetzt werden unter Verwendung von (3.49). Es ergibt sich schliesslich

$$\frac{C_{m,n+1} - C_{m,n}}{\Delta t} + u \cdot \frac{C_{m+1,n} - C_{m,n}}{\Delta x} - \left(\frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \Delta x \right) \cdot \frac{\partial^2 C_{m,n}}{\partial x^2} - \dots = 0. \quad (3.52)$$

Der dritte Term in (3.52) ist wiederum ein Diffusionsterm. Aus (3.52) erkennen wir also, dass bei der Verwendung von Schemen 1. Ordnung zur numerischen Darstellung von Ableitungen immer auch numerische Diffusion auftritt. Dabei können wir eine *numerische Diffusivität* definieren:

$$K_N = \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot u \cdot \Delta x, \quad (3.53)$$

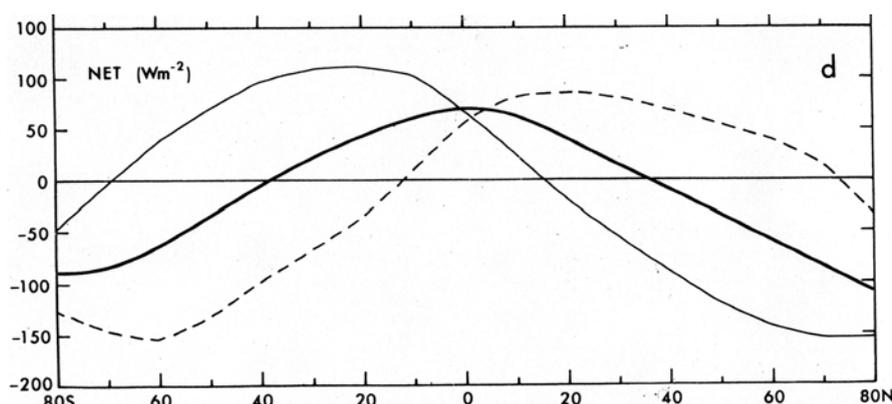
die mit dem Zeit- und Raumschritt skaliert.

Es gibt verschiedene Verfahren, die die numerische Diffusion bis zu einem gewissen Grade korrigieren (siehe z.B. Smolarkiewicz, 1983, *Monthly Weather Review* 111, 479-486). Moderne Schemata sind unter der Bezeichnung FCT-Schemata bekannt (*flux corrective transport*).

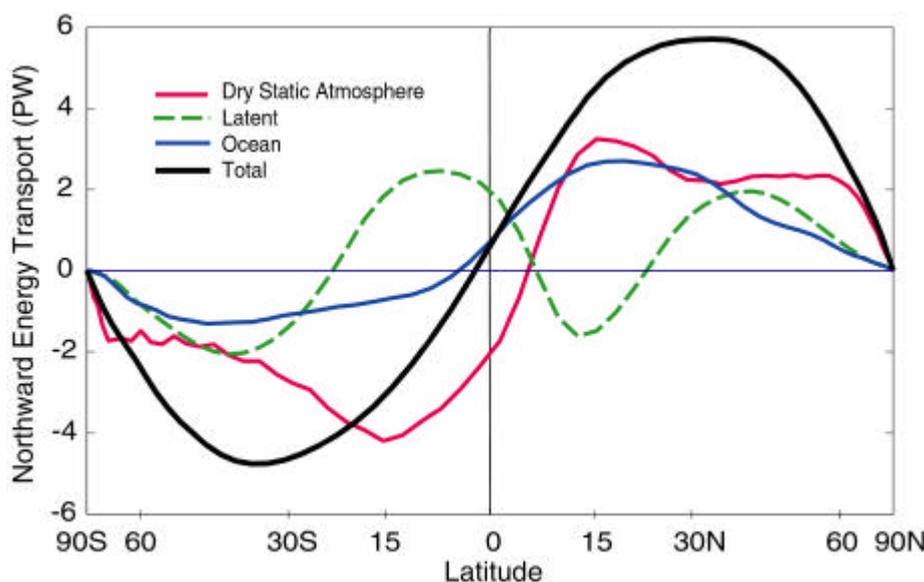
4 Energietransport im Klimasystem und seine Parametrisierung

4.1 Grundlagen

Im jährlichen Mittel nimmt die Erde zwischen 30°S und 30°N Energie auf, währenddem polwärts eine negative Energiebilanz vorliegt (Fig. 4.1). Da weder eine ständige Erwärmung in den niederen Breiten, noch eine Abkühlung in den hohen Breiten beobachtet wird, muss ein starker polwärtiger Transport von Energie stattfinden. Durch Integration der meridionalen Strahlungsbilanz vom Südpol zum Nordpol, wie sie in Fig. 4.1 vorliegt, erhält man den meridionalen Wärmetransport, der die Strahlungsbilanz erfordert (Fig. 4.2). Dabei werden etwa $5 \cdot 10^{15} \text{ J/s} = 5 \text{ PW}$ (Petawatt) in jeder Hemisphäre polwärts transportiert. Der Ozean und die Atmosphäre übernehmen je etwa die Hälfte dieses Flusses. Der maximale Wärmetransport in der Nordhemisphäre liegt bei etwa 45°N in der Atmosphäre, und bei ca. 20°N im Ozean. Dies weist bereits auf die unterschiedlichen Mechanismen und Randbedingungen (Kontinente) im Zusammenhang mit dem meridionalen Wärmetransport hin. Die Atmosphäre transportiert Wärme in grundsätzlich unterschiedlicher Weise zum Ozean. Die wichtigsten Mechanismen werden in den folgenden Kapiteln kurz erläutert.



Figur 4.1: Strahlungsbilanz (Winter, Sommer, und Jahresmittel) als Funktion der geographischen Breite. (Figur aus Peixoto & Oort, 1992)



Figur 4.2: Meridionaler Wärmetransport in der Atmosphäre (latent und trocken) und im Ozean im Jahresmittel. (Figur aus *Ocean Circulation & Climate*, 2001)

Eine zentrale Frage ist, wie die Klimamodelle den Wärmetransport simulieren, und ob ein bestimmtes Modell die relevanten Prozesse des Wärmetransportes überhaupt darstellen kann. Es zeigt sich, dass die besten heutigen 3-dimensionalen Klimamodelle (Position 3/3 in der Modellhierarchie von Tab. 2.1) die Wärmetransporte in konsistenter Weise sowohl in der Atmosphäre, wie auch im Ozean wiedergeben. Vor allem die gröber aufgelösten Modelle unterschätzen jedoch meridionale Wärmetransporte in wichtigen Komponenten, so dass unphysikalische Korrekturen in diesen Modellen notwendig werden.

4.2 Wärmetransport in der Atmosphäre

Die totale Energie pro Einheitsmasse in der Atmosphäre ist gegeben durch

$$E = \underbrace{c_v \cdot T}_I + \underbrace{g \cdot z}_P + \underbrace{L \cdot q}_L + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2)}_K \quad (4.1)$$

wobei c_v die spezifische Wärmekapazität von Luft, T die Temperatur, g die Erdbeschleunigung, z eine Höhe über einem Referenzniveau, L die Verdunstungswärme, q die Feuchte und u und v die horizontalen Komponenten der Geschwindigkeit darstellen. Die vier Terme auf der rechten Seite bezeichnen die innere (I), potentielle (P), latente (L), und kinetische (K) Energie. Die Grössenordnung der einzelnen Formen der Energie in der Atmosphäre sind in Tab. 4.1 angegeben.

		[10^6 Jm^{-2}]	% Anteil
innere Energie	I	1800	70.2
potentielle Energie	P	700	27.3
latente Energie	L	64	2.5
kinetische Energie	K	1.3	0.05
totale Energie		2565	100.0

Tabelle 4.1: Grösse und Verteilung der Energieformen in der globalen Atmosphäre (aus Peixoto & Oort, 1992)

Um die Mechanismen des zeitlich und zonal gemittelten Energieflusses $\bar{\vec{F}} = \bar{\vec{u}} \cdot \bar{E}$ zu erläutern, spalten wir die Variablen in einen Mittelwert und zeitliche und zonale Abweichungen auf. Dazu definiert man das zeitliche und zonale Mittel einer Grösse A wie folgt:

$$\bar{A} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A \cdot dt \quad , \quad [A] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cdot d\lambda \quad , \quad (4.2)$$

und bezeichnen die zeitlichen und zonalen Abweichungen von den jeweiligen Mittelwerten als

$$A' = A - \bar{A} \quad , \quad A^* = A - [A] \quad . \quad (4.3)$$

Aus (4.3) folgt, dass

$$\overline{A'} = 0 \quad , \quad [A^*] = 0 \quad . \quad (4.4)$$

Bei der Berechnung des Energieflusses $\vec{F} = \vec{u} \cdot E$ treten Produkte auf. Es gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \overline{A \cdot B} &= \overline{(\overline{A} + A') \cdot (\overline{B} + B')} = \overline{A \cdot B} + \overline{A' \cdot B'} \\ &= (\overline{A} + \overline{A^*}) \cdot (\overline{B} + \overline{B^*}) + \overline{A' \cdot B'} \\ &= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{B^*} + \overline{A^*} \cdot \overline{B} + \overline{A^*} \cdot \overline{B^*} + \overline{A' \cdot B'} \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nach zonaler Mittelung von (4.5) erhalten wir

$$[\overline{A \cdot B}] = [\overline{A}] \cdot [\overline{B}] + 0 + 0 + [\overline{A^*} \cdot \overline{B^*}] + [\overline{A' \cdot B'}] \quad . \quad (4.6)$$

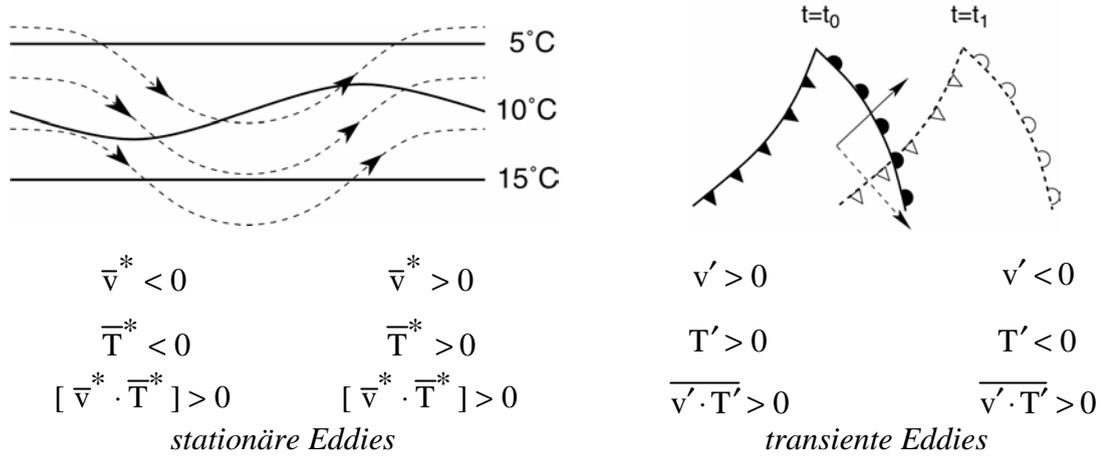
Der zonale und zeitliche Mittelwert einer Produktgrösse besteht also aus dem Produkt der Mittelwerte der jeweiligen Einzelgrössen *plus* den Mittelwerten der räumlichen und zeitlichen *Korrelationen* der jeweiligen Einzelgrössen.

Im Folgenden betrachten wir zur Illustration die erste Komponente von (4.1). Indem nun (4.6) auf den meridionalen Fluss der inneren Energie $v \cdot c_v \cdot T$ angewendet wird, erhalten wir nach Weglassen der konstanten Wärmekapazität für den zonal und zeitlich gemittelten meridionalen Fluss von innerer Energie

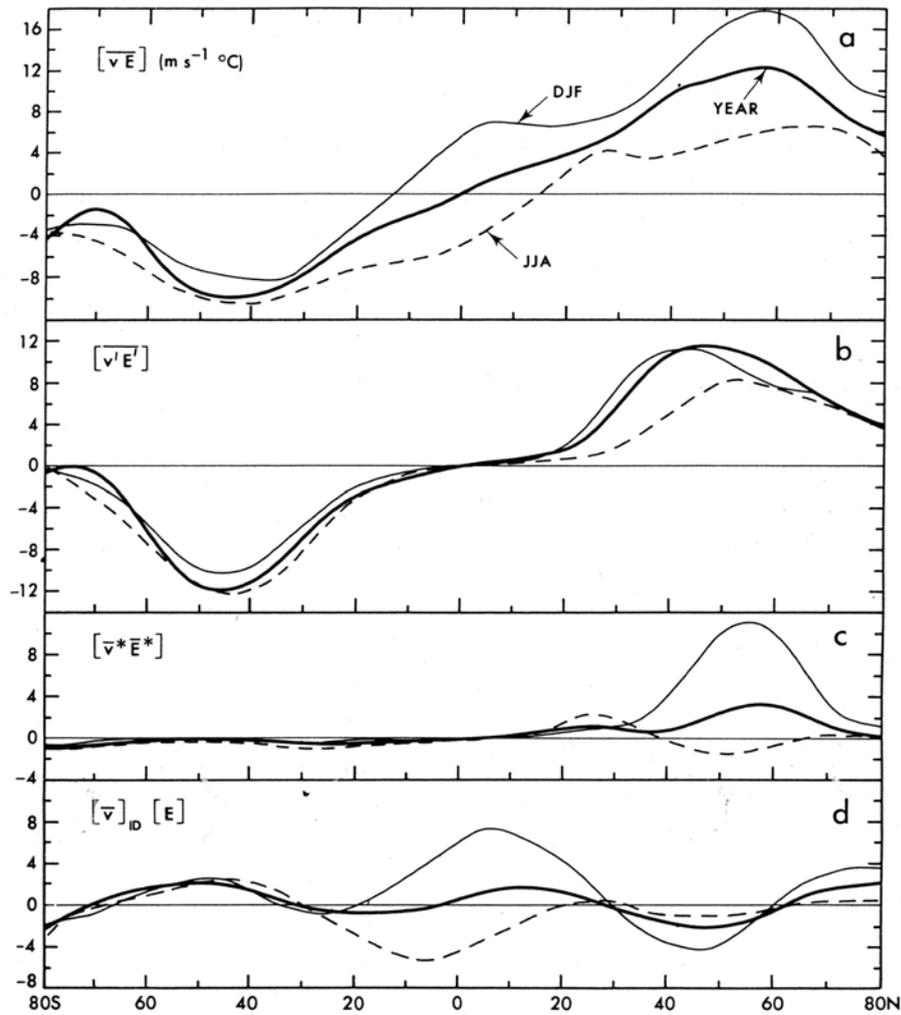
$$[\overline{v \cdot T}] = \underbrace{[\overline{v}] \cdot [\overline{T}]}_M + \underbrace{[\overline{v^*} \cdot \overline{T^*}]}_{SE} + \underbrace{[\overline{v' \cdot T'}]}_{TE} \quad . \quad (4.7)$$

Der zonal und zeitlich gemittelte meridionale Fluss von innerer Energie besteht also aus drei Anteilen: der Fluss aufgrund der mittleren meridionalen Strömung (M), der Fluss aufgrund stationärer Eddies (d.h. zeitliche Mittelwerte von Hoch- und Tiefdruckgebieten), und der Fluss aufgrund transienter Eddies (d.h. wandernde Hoch- und Tiefdruckgebiete).

Dabei ist M der klassische advektive Wärmefluss wie er bereits in 3.1 vorgestellt wurde. SE und TE entstehen jedoch aufgrund von räumlichen und zeitlichen Korrelationen zwischen v und T . Eine Illustration ist in Fig. 4.3 gegeben.



Figur 4.3: Schematische Darstellung von stationären und transienten Eddies in der Atmosphäre. In der dargestellten Situation transportieren beide Systeme Wärme nordwärts.



Figur 4.4: Profile der zonal und vertikal gemittelten meridionalen Transporte der gesamten Energie (4.1) in $^{\circ}\text{C m s}^{-1}$. (a) total; (b) transiente Eddies; (c) stationäre Eddies; (d) mittlere meridionale Strömung, für das Jahresmittel, Winter- und Sommermonate. Um Einheiten PW zu erhalten, muss mit dem Faktor $(2\pi R \cos\phi)c_p(p_0/g)$ multipliziert werden. (Figur aus Peixoto & Oort, 1992).

4.3 Breitenabhängiges Energiebilanzmodell

Wie aus Fig. 4.4 ersichtlich ist, ist der über das Jahr gemittelte meridionale Transport von Energie in der Atmosphäre positiv in der Nord- und negativ in der Südhemisphäre.

Im zonalen und jährlichen Mittel ist der meridionale Temperaturgradient $\partial T / \partial \varphi$ positiv in der Süd- und negativ in der Nordhemisphäre. Es besteht also eine negative Korrelation zwischen $\partial T / \partial \varphi$ und $[\overline{v \cdot E}]$. Diese auf Beobachtung basierende Beziehung wird nun verwendet, um eine Parametrisierung des meridionalen Wärmeflusses zu formulieren. Man schreibt

$$F = - \frac{K(\varphi) \cdot \rho \cdot C}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad (4.8)$$

wobei F der meridionale Fluss von Energie, K eine breitenabhängige Diffusivität, R der Erdradius, φ die geographische Breite, und T die lokale Temperatur darstellt. K wird als *Eddy-Diffusivität* bezeichnet, und ist von der Größenordnung $10^6 \text{ m}^2/\text{s}$.

Es muss betont werden, dass Parametrisierung (4.8) in keiner Weise die Physik des Energietransports wiedergibt, sondern einen einfachen, und von Daten her plausiblen Zusammenhang des Flusses mit der Temperatur herstellt. Es ist klar, dass die Längen- und Zeitskalen, wo (4.8) gewisse Gültigkeit zukommt, stark eingeschränkt sind. Figur 4.4 zeigt, dass im Winter, wenn grössere Temperaturgradienten vorliegen, auch mehr Energie transportiert wird. Ed Lorenz (1979, *J. Atmospheric Sci.* 36, 1367) hat anhand von Daten gezeigt, dass (4.8) zulässig ist für Zeitskalen von ≥ 6 Monaten und Längenskalen von ≥ 1500 km.

Das Punkt-Energiebilanzmodell (2.1) kann nun zu einem 1-dimensionalen Energiebilanzmodell erweitert werden. Die Bilanzgleichung lautet

$$h \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{h}{R \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{K(\varphi) \cdot \rho \cdot C}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1 - \alpha(\varphi)}{4} \cdot S(\varphi) - \varepsilon(\varphi) \cdot \sigma \cdot T^4, \quad (4.9)$$

wobei nun die Eddy-Diffusivität K , die Albedo α und die Emissivität ε Funktionen der geographischen Breite sein können. Die kurzwellige Einstrahlung $S(\varphi)$ ist ebenfalls eine Funktion der Breite. Eine gute Näherung für den jährlichen Mittelwert ist gegeben durch $S(\varphi) = S_0 \cdot (0.5294 + 0.706 \cdot (\cos \varphi)^2)$, wobei S_0 die Solarkonstante ist.

Der erste Term rechts in (4.9) ist die Divergenz des meridionalen Wärmeflusses. Die Temperatur ist eine Funktion der Zeit und der Breite. Da (4.9) eine Differentialgleichung 2. Ordnung ($\partial^2 / \partial \varphi^2$) im Raum ist, müssen zwei Randbedingungen erfüllt sein. Die Randbedingung an den beiden Polen lautet, dass der Wärmefluss verschwinden muss, also

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{für} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}. \quad (4.10)$$

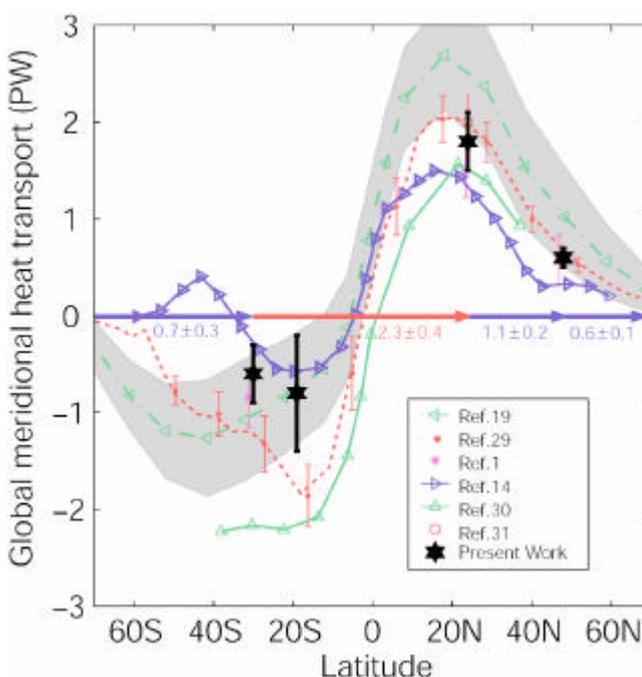
Das in (4.9) gezeigte 1-dimensionale Energiebilanzmodell wird auch als *Budyko-Sellers EBM* bezeichnet. Budyko (1969, *Tellus* 21, 611) und Sellers (1969, *J. Appl. Meteorol.* 8, 392) waren die ersten, die ein vereinfachtes Klimamodell vorschlugen, um damit grundlegende Fragen der Klimaänderung zu untersuchen.

Das EBM in (4.9) kann auf 2 Dimensionen verallgemeinert werden, indem die zonale Richtung als weitere Variable berücksichtigt wird. Solche Modelle wurden in den 80er Jahren verwendet, um die Temperaturdifferenz zwischen Eiszeit und Warmzeit aufgrund von Veränderungen in der Strahlungsbilanz abzuschätzen (North *et al.*, 1983, *J. Geophys. Res.* 88, 6576). Sie kommen auch heute noch in Modellen reduzierter Komplexität zum Einsatz (Tab. 2.1, Dimensionen 2/2, und 2/3).

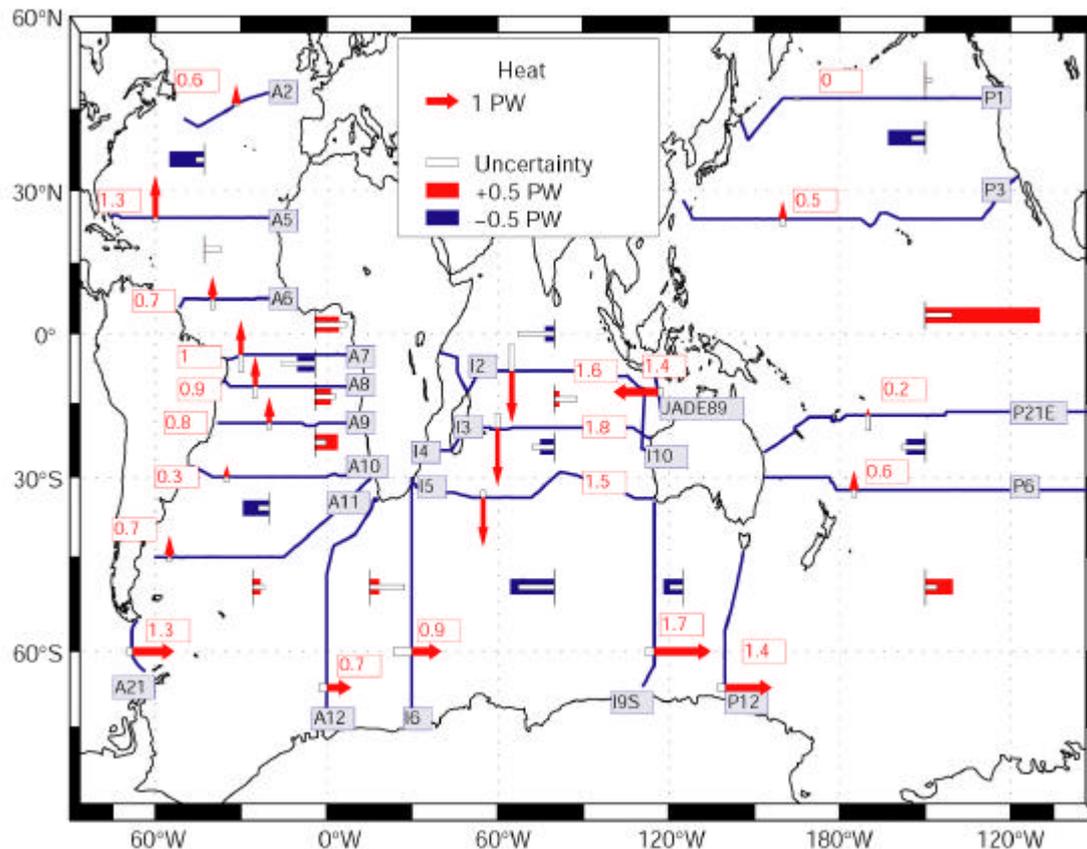
Es muss betont werden, dass dynamische Zirkulationsmodelle der Atmosphäre (AGCMs) die einzelnen Beiträge zum Energietransport (siehe 4.1 und 4.6, 4.7) aus der Dynamik berechnen und vereinfachte Parametrisierungen wie (4.8) nicht benötigen. Dazu ist aber eine minimale räumliche Auflösung notwendig, um die Eddies und deren Transport zu simulieren. Diese beträgt etwa 1000 km oder weniger. Dies wiederum limitiert die Länge der Integrationen, und somit die Anwendbarkeit von GCMs für paläoklimatische Problemstellungen.

4.4 Wärmetransport im Ozean

Der meridionale Wärmetransport im Ozean beruht auf ganz anderen Mechanismen als derjenige in der Atmosphäre, obwohl die Gleichungen, die die Strömungen beschreiben, in beiden Systemen analog sind. Der Grund liegt darin, dass einerseits die Parameter in diesen Gleichungen andere Werte annehmen (zum Teil um Größenordnungen verschieden), und andererseits der Ozean Beckenränder aufweist. An letzteren bilden sich wichtige Stromsysteme aus, die einen wesentlichen Anteil am meridionalen Wärmefluss haben.



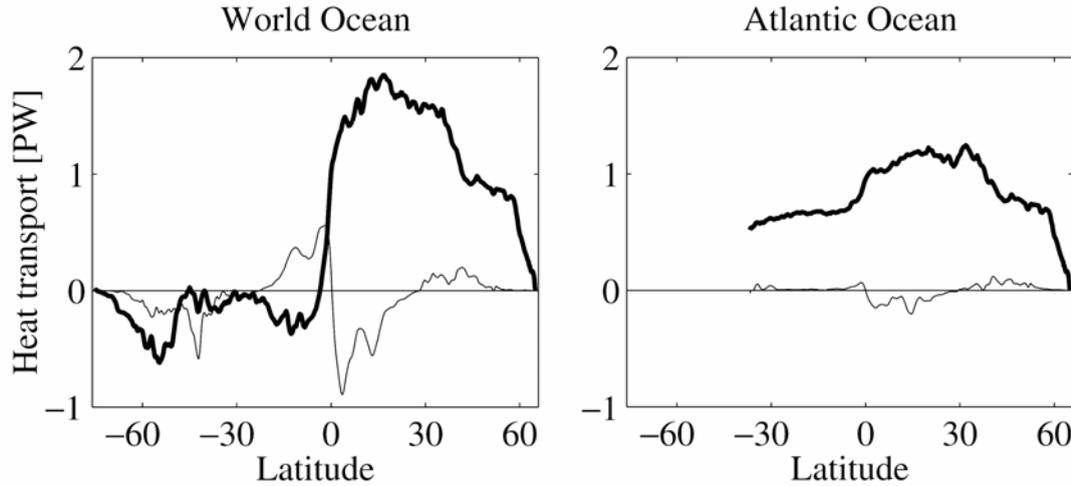
Figur 4.5: Zonal integrierter meridionaler Wärme transport im Ozean aufgrund von Beobachtungen und inversen Berechnungen. (Figur aus Ganachaud & Wunsch, 2000, *Nature* 408, 453)



Figur 4.6: Meridionale und vertikale Wärmetransporte in einzelnen Regionen des Weltozeans. Die Zahlen in den Kästchen geben den meridionalen Transport in PW an. Horizontale Balken markieren vertikalen Transport (nach links = abwärts). (Figur aus Ganachaud & Wunsch, 2000, *Nature* 408, 453).

Im Ozean spielen Eddies, mit Ausnahme von einigen speziellen Regionen (Äquator, Zirkumpolarstrom, Südspitze von Afrika) eine untergeordnete Rolle für den meridionalen Wärmetransport. Jedoch basieren diese Aussagen momentan auf idealisierten Modellsimulationen und spärlichen gemessenen Daten, sodass die Unsicherheiten immer noch recht gross sind. Eine Abschätzung des meridionalen Wärmetransports im globalen Ozean ist in Fig. 4.5 dargestellt. Etwa 2 PW werden in beiden Hemisphären polwärts transportiert, wobei das Maximum in der Nordhemisphäre weiter äquatorwärts liegt als in der Südhemisphäre.

Die einzelnen Ozeanbecken transportieren unterschiedlich viel Wärme, in unterschiedlicher Richtung. Ganachaud & Wunsch (2000) haben anhand von Temperatur und Salinitätsmessungen im Ozean, und mit Hilfe von inversen Modellen, eine grobe Abschätzung der Wärmeflüsse durchgeführt. Dies ist in Fig. 4.6 gezeigt. Während im Atlantik die Wärme an allen Breitengraden nordwärts transportiert wird, stellt man im Indischen Ozean südwardigen Transport fest. Trotz der grossen Ausdehnung sind die Transporte im Pazifik erstaunlich klein. Am grössten ist der Transport im Zirkumpolarstrom. Dort werden etwa 1.3 bis 1.7 PW westwärts transportiert. Die Richtung des Wärmetransports in den einzelnen Ozeanbecken ist konsistent mit der stark vereinfachten Darstellung des globalen ozeanischen Förderbandes nach Wally Broecker.



Figur 4.7: Zonal integrierter meridionaler Wärmetransport für den gesamten Ozean und den Atlantik, totaler Fluss (fett), und Beitrag der Eddies (dünne Linien), simuliert mit einem hochauflösenden OGCM. (Figur von Jayne & Marotzke, 2002).

Zur Quantifizierung von Transportmechanismen von Wärme im Ozean, definieren wir die vertikale Mittelung der Grösse A im Ozean gemäss

$$\bar{A} = \frac{1}{H} \cdot \int_{-H}^0 A \cdot dz \quad A' = A - \bar{A} , \quad (4.11)$$

und erhalten analog zu (4.7) folgende Aufteilung für den meridionalen Wärmetransport:

$$\overline{[\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}]} = \underbrace{[\bar{\mathbf{v}}] \cdot [\bar{\mathbf{T}}]}_{=0} + \underbrace{[\bar{\mathbf{v}}^*] \cdot [\bar{\mathbf{T}}^*]}_G + \underbrace{[\mathbf{v}'] \cdot [\mathbf{T}']}_{\text{MOC}} + \underbrace{[\mathbf{v}'^*] \cdot [\mathbf{T}'^*]}_{\text{EK}} - \underbrace{\frac{K}{R} \cdot \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial \phi} \right]}_D , \quad (4.12)$$

wobei der erste Term wegen der Massenerhaltung in einem geschlossenen Becken verschwindet, G bezeichnet den Wärmetransport aufgrund horizontaler barotroper Wirbel (*gyres*), MOC ist die meridionale Tiefenzirkulation (*meridional overturning circulation*), und EK ist der Wärmetransport aufgrund der oberflächen- und bodennahen Ekman-Zirkulation. Der Term D ist vor allem in grob aufgelösten Ozeanmodellen wichtig, welche Eddy-Diffusion enthalten.

Die Datenlage im Ozean erlaubt es gegenwärtig noch nicht, (4.12) anhand von Messungen zu bestimmen. Bryan (1987, *J. Physical Oceanogr.* 17, 970) hat deshalb (4.12) in einem grob aufgelösten Ozeanmodell, das keine Eddies simuliert, berechnet und gefunden, dass etwa 80% des meridionalen Wärmetransports im Atlantik durch die meridionale Tiefenzirkulation (MOC) zustande kommt. Diese Resultate wurde kürzlich durch eine Simulation mit einem hochauflösenden globalen OGCM bestätigt (Jayne & Marotzke, 2002, *J. Phys. Oceanogr.* 32, 3328). Dieses Modell simuliert dank einer Auflösung von 0.25° die einzelnen Eddies. Sowohl global, wie auch im Atlantik kommt der meridionale Transport von Wärme mehrheitlich durch den Term MOC in (4.12) zustande. Die Eddies tragen nur in einzelnen beschränkten Regionen (vor allem im tropischen Pazifik und die westlichen Randströme) zum gesamten Wärmetransport bei (Fig. 4.7). Aus diesem Grund ist im Atlantik die Tiefenzirkulation, oder *thermohaline Zirkulation*, diejenige, die für das Klima besonders relevant ist.

Eine grobe Abschätzung der Grösse des Terms MOC in (4.12) liefert folgende Werte. Die thermohaline Zirkulation transportiert im Nordatlantik etwa $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ polwärts nahe der Oberfläche bei ca. 18°C . Gleichzeitig fliesst dasselbe Volumen auf ca. 2-3 km Tiefe entlang des westlichen Randes äquatorwärts bei einer Temperatur von ca. 3°C . Dies entspricht einem meridionalen Wärmetransport von $\rho \cdot C \cdot (\Delta V / \Delta t) \cdot \Delta T \approx 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 15 \text{ W} = 1.2 \text{ PW}$. Dies ist in ungefähre Übereinstimmung mit den Werten in Fig. 4.6. Der grosse vertikale Temperaturkontrast ist also die Ursache für den meridionalen Wärmetransport im Atlantik.

Auch in Ozeanmodellen müssen wegen der beschränkten Gitterauflösung die subskaligen Transporte parametrisiert werden. Dabei wählt man wie beim Energiebilanzmodell (4.8) einen diffusiven Ansatz (siehe 4.12, Term D), da es physikalische Mechanismen gibt (barotrope und barokline Instabilität), die tatsächlich mit den Gradienten von Temperatur und Geschwindigkeit skalieren. Man nimmt deshalb an:

$$\begin{array}{ll}
 -A_H \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, -A_H \cdot \frac{\partial u}{\partial y} & -A_H \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, -A_H \cdot \frac{\partial v}{\partial y} & \text{Eddy-Impulsfluss x,y-Richtung} \\
 -A_V \cdot \frac{\partial u}{\partial z} & -A_V \cdot \frac{\partial v}{\partial z} & \text{Eddy-Impulsfluss z-Richtung} \\
 -K_H \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, -K_H \cdot \frac{\partial T}{\partial y} & -K_H \cdot \frac{\partial S}{\partial x}, -K_H \cdot \frac{\partial S}{\partial y} & \text{Eddy-Wärme- und Salzfluss x,y-Richtung} \\
 -K_V \cdot \frac{\partial T}{\partial z} & -K_V \cdot \frac{\partial S}{\partial z} & \text{Eddy-Wärme- und Salzfluss z-Richtung}
 \end{array}$$

Die Wahl der Werte der Eddy-Viskositäten A_H , A_V , und der Eddy-Diffusivitäten K_H , K_V ist durch Daten ungenügend eingeschränkt und deshalb sehr unsicher. Der Wert von A_H ist in einem bestimmten Modell von der Gitterauflösung abhängig: je kleiner Δx , desto kleiner A_H , da das Modell für kleinere Δx mehr Skalen selbst auflöst. Tabelle 4.2 gibt typische Werte an, die in Ozeanmodellen verwendet werden.

	Typische Werte
A_H, A_V	$10^1 \dots 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
A_Z	$10^{-5} \dots 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
K_H	$10^3 \dots 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
K_V	$10^{-5} \dots 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Tabelle 4.2: Werte für Eddy-Viskositäten und Eddy-Diffusivitäten in grob aufgelösten Ozeanmodellen

Die Rolle von Eddies in der Mischung von Wassermassen und deren realistische und konsistente Parametrisierung in Modellen ist ein aktuelles Forschungsthema. Ebenfalls ungelöst ist die Frage, wie der Mischungseffekt von Gezeiten berücksichtigt werden sollte.

5 Anfangswert- und Randwertprobleme

5.1 Allgemeine Grundlagen

Die bekannten Energiebilanzmodelle von Sellers und Budyko (1969) lösen die Gleichung (4.9). Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit, und 2. Ordnung im Ort. Der erste Term auf der rechten Seite ist die Divergenz des Temperaturgradienten in einer Dimension, der zweite Term ist ein Quellterm, der unabhängig von der Lösung selbst ist, und schliesslich folgt ein Term, der – in linearer Näherung – proportional zur Lösung ist. Eine allgemeine Klassifizierung solcher Gleichungen wird anhand von

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \cdot \nabla^2 C + \alpha \cdot C + \rho(\bar{x}) \quad (5.1)$$

vorgenommen, wobei $C(\bar{x}, t)$ die gesuchte Funktion ist, die (5.1) für gegebene Rand- und Anfangsbedingungen lösen muss. (5.1) wird als *Anfangswertproblem* bezeichnet. Falls wir nur an den Gleichgewichtslösungen interessiert sind, das heisst die Lösung C nicht mehr von der Zeit abhängt, so erhalten wir die Gleichung

$$\nabla^2 C + \tilde{\alpha} \cdot C + \tilde{\rho}(\bar{x}) = 0, \quad (5.2)$$

welches als *Randwertproblem* bezeichnet wird. Sowohl (5.1) wie auch (5.2) müssen in einem Gebiet (nicht notwendig endlich) gelöst werden, an dessen Grenzen, die gegebenenfalls im Unendlichen liegen, Randbedingungen bezüglich C oder der ersten Ableitung senkrecht zum Rand erfüllt sein müssen. In speziellen Fällen der Parameter in (5.2) werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$\tilde{\alpha} = 0$,	$\tilde{\rho} = 0$	Laplace Gleichung, Potentialgleichung,
$\tilde{\alpha} = 0$,	$\tilde{\rho} \neq 0$	Poisson Gleichung,
$\tilde{\alpha} \neq 0$,	$\tilde{\rho} = 0$	Helmholtz Gleichung.

Gleichung (5.1) beschreibt sehr viele lineare, oder linearisierte Phänomene in der Physik, Chemie und mathematischen Biologie. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist also von zentraler Bedeutung. In Klimamodellen und deren Komponenten (Ozean-, Atmosphäre-, Eisschildmodelle) werden generell Anfangswertprobleme gelöst., da die zeitliche Entwicklung dieser Komponenten von Interesse ist. Hingegen treten Randwertprobleme wie (5.2) beispielsweise im Zusammenhang mit der Bestimmung der periodischen Lösungen von Wellenbewegungen (Gezeiten, Druckverteilung der windgetriebenen Ozeanströmung, Wellen in der Atmosphäre, etc.), oder bei der Lösung von *spektralen Modellen* auf. Diese werden später kurz eingeführt.

Eines der häufigsten Randwertprobleme ist die Poissongleichung, also

$$\nabla^2 C = \rho(\bar{x}), \quad (5.3)$$

oder speziell in 2 Dimensionen

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \rho(x,y) . \quad (5.4)$$

Die Gleichung (5.3) beschreibt beispielsweise stationäre Temperaturverteilungen in Gebieten mit Wärmequellen, Spannungsverteilungen in Gebieten mit elektrischen Ladungen, oder Strömungen idealer Flüssigkeiten in abgeschlossenen Gebieten. Zur Lösung von (5.4) müssen noch Randbedingungen der Form

$$\alpha \cdot \frac{\partial C}{\partial n} + \beta \cdot C = \gamma \quad (5.5)$$

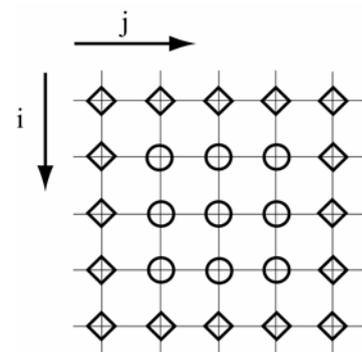
festgelegt werden, wobei $\partial/\partial n$ die Ableitung senkrecht zum Rand ist. Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

$\alpha = 0$,	Dirichlet Randbedingung,
$\beta = 0$,	Neumann Randbedingung,
sonst,	Cauchy Randbedingung.

5.2 Direkte numerische Lösung der Poissongleichung

Dieser Abschnitt ist nur aus didaktischen Gründen hier angeführt; die numerische Lösung eines Randwertproblems würde in dieser Weise nicht durchgeführt, weil der Aufwand, eine brauchbare Näherungslösung zu erhalten, zu gross ist. Dazu gibt es viel bessere Verfahren, die wir nachfolgend vorstellen.

Zunächst nehmen wir vereinfachend an, dass das Gebiet, in dem die Gleichung gelöst werden soll, quadratisch sei. Zur numerischen Lösung von (5.4) wird ein Gitter über das Gebiet gelegt mit den Gitterpunktabständen Δx und Δy (Fig. 5.1). Dabei werden die Kreise als *innere Punkte*, die Rhomben als *Randpunkte* bezeichnet. Weiter nehmen wir an, dass Dirichlet Randbedingungen vorliegen, das heisst, dass die Werte der Randpunkte bekannt sind. Die Ableitungen in (5.4) werden gemäss Tab. 2.2 diskretisiert, und lauten



Figur 5.1: Gitter mit inneren Punkten und Randpunkten

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i,j+1} - 2 \cdot C_{i,j} + C_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) , \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C_{i+1,j} - 2 \cdot C_{i,j} + C_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2) . \quad (5.6b)$$

5.3 Iterative Verfahren

Die Inversion einer grossen Matrix ist kostspielig. Deshalb behilft man sich mit iterativen, oder Relaxationsverfahren. Die Lösung von (5.4) ist eine spezielle Lösung der zeitabhängigen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \rho(x, y) \quad , \quad (5.10)$$

nämlich diejenige, für die $\partial C / \partial t = 0$ ist. Wir suchen also die stationäre Lösung von (5.10). Diskretisierung in Raum und Zeit ergibt

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n + \frac{K \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (C_{i+1,j}^n + C_{i-1,j}^n + C_{i,j+1}^n + C_{i,j-1}^n - 4 \cdot C_{i,j}^n) - K \cdot \Delta t \cdot \rho_{i,j} \quad , \quad (5.11)$$

wobei wiederum $\Delta x = \Delta y$, und der obere Index n den Zeitschritt bezeichnet. Für die Diskretisierung in der Zeit wurde in (5.11) Euler vorwärts verwendet. An die Stelle der simultanen Lösung eines linearen Gleichungssystems ist nun die iterative Rechenvorschrift (5.11) getreten. Auch für (5.11) muss ein CFL-Kriterium erfüllt sein, nämlich

$$\frac{K \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4} \quad . \quad (5.12)$$

Durch die Wahl des aus (5.12) ersichtlichen maximalen Zeitschrittes wird aus (5.11) das klassische *Jacobi Verfahren*:

$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (C_{i+1,j}^n + C_{i-1,j}^n + C_{i,j+1}^n + C_{i,j-1}^n) - \frac{(\Delta x)^2}{4} \cdot \rho_{i,j} \quad . \quad (5.13)$$

Das Jacobi Verfahren konvergiert nur sehr langsam. Ein verwandtes Verfahren ist das *Gauss-Seidel Verfahren*, das bereits berechnete Werte des neuen Zeitschrittes in (5.13) verwendet. Wenn also entlang der Zeilen ($i = \text{konstant}$) von kleinen zu grossen j fortgeschritten wird, so kann (5.13) modifiziert werden zu

$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (C_{i+1,j}^n + C_{i-1,j}^{n+1} + C_{i,j+1}^n + C_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{(\Delta x)^2}{4} \cdot \rho_{i,j} \quad . \quad (5.14)$$

Auch Gauss-Seidel ist nicht sehr effizient. Um den Fehler der Lösung um p Grössenordnungen zu reduzieren (also um den Faktor 10^p), benötigt man $\cong \frac{1}{2} \cdot p \cdot J^2$ Iterationen, wobei J die Anzahl der Gitterpunkte ist.

5.4 Successive Overrelaxation (SOR)

Bis 1970 war Successive Overrelaxation der Standardalgorithmus zur Lösung von Randwertproblemen. Für einfache Probleme, die nicht auf Effizienz ausgelegt werden müssen, ist SOR aber immer noch ein gutes und geeignetes Verfahren. SOR ist ein iteratives Verfahren, das von der Diskretisierung der stationären Form der Gleichung, also von (5.7) ausgeht.

Die Lösungsmatrix C (in 5.8) wird wiederum wie ein Vektor durchnummeriert, das heisst C_k , $k = 1, \dots, J$, $J = M \cdot N$. Der Klarheit halber verwenden wir hier anstatt C die Bezeichnung x für den Lösungsvektor. Wir schreiben jetzt (5.7) als

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} . \quad (5.15)$$

Die Matrix \mathbf{A} kann als Summe der Diagonalen, einer linken und einer rechten Dreiecksmatrix geschrieben werden

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R} . \quad (5.16)$$

Die bereits besprochenen Verfahren lauten in dieser Schreibweise

$$\text{Jacobi Verfahren} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{n+1} = -(\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}^n + \mathbf{b} , \quad (5.17)$$

$$\text{Gauss-Seidel Verfahren} \quad (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x}^{n+1} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^n + \mathbf{b} . \quad (5.18)$$

Wir subtrahieren nun auf beiden Seiten von (5.18) $(\mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x}^n$ und lösen nach \mathbf{x}^{n+1} auf. Es entsteht folgende Gleichung

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \underbrace{((\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}^n - \mathbf{b})}_{= \xi^n} . \quad (5.19)$$

Die Grösse ξ^n ist das Residuum der zu lösenden Gleichung (5.15) beim n -ten Iterationsschritt, denn $\xi^n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^n - \mathbf{b}$. Die Iteration lautet also

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \underbrace{(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \xi^n}_{\text{KOR}} , \quad (5.20)$$

wobei KOR die Korrektur der Schätzung der Lösung der n -ten Iteration ist.

Die Idee des Verfahrens der Successive Overrelaxation ist nun, in (5.20) die Korrektur um einen Faktor ω , mit $1 < \omega < 2$, zu vergrössern. Dementsprechend lautet das SOR Verfahren

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \omega \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \xi^n . \quad (5.21)$$

Es kann gezeigt werden, dass zur Reduktion des Fehlers um den Faktor 10^p nun nur noch $\frac{1}{3} \cdot p \cdot J$ Iterationen notwendig sind, anstatt $\frac{1}{2} \cdot p \cdot J^2$ wie für das Jacobi und Gauss-Seidel Verfahren, falls das optimale ω in (5.21) verwendet wird. Gerade dies ist das zunächst etwas Aufwändigere beim SOR Verfahren, doch gibt es a priori Abschätzungen für ω_{opt} (siehe *Numerical Recipes*, Kapitel Relaxation Methods). Bei kleineren Problemstellungen kann man ω_{opt} auch durch Probieren finden.

Während die Matrixformulierung (5.21) des Algorithmus von theoretischer Bedeutung ist, ist die praktische Umsetzung einfacher. Die diskretisierte Form einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann allgemein wie folgt geschrieben werden:

$$a_{i,j} \cdot x_{i+1,j} + b_{i,j} \cdot x_{i-1,j} + c_{i,j} \cdot x_{i,j+1} + d_{i,j} \cdot x_{i,j-1} + e_{i,j} \cdot x_{i,j} = f_{i,j} . \quad (5.22)$$

Nun wird der neue Schätzwert von $x_{i,j}$ analog zu (5.21) berechnet:

$$x_{i,j}^{n+1} = x_{i,j}^n - \omega \cdot \frac{\zeta_{i,j}}{e_{i,j}} , \quad (5.23)$$

wobei $\zeta_{i,j}$ das Residuum der n-ten Iteration ist:

$$\zeta_{i,j} = a_{i,j} \cdot x_{i+1,j} + b_{i,j} \cdot x_{i-1,j} + c_{i,j} \cdot x_{i,j+1} + d_{i,j} \cdot x_{i,j-1} + e_{i,j} \cdot x_{i,j} - f_{i,j} . \quad (5.24)$$

Die Verwendung von bereits berechneten $x_{i,j}^{n+1}$ in (5.24) beschleunigt das Verfahren.

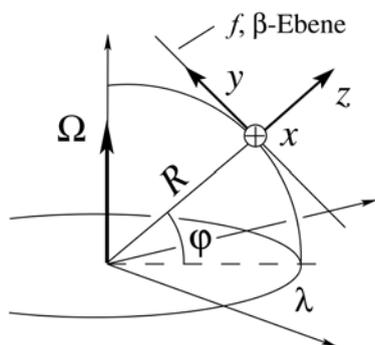
6 Gross-skalige Zirkulation im Ozean

6.1 Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für eine rotierende Flüssigkeit basieren auf dem 2. Newton'schen Gesetz, angewendet auf ein Bezugssystem, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ rotiert. Somit treten Scheinkräfte auf, die berücksichtigt werden müssen. Für die gross-skaligen Bewegungen auf der Erde (Luftmassen in der Atmosphäre, Wassermassen im Ozean, Magma im flüssigen Erdinnern) spielt die *Corioliskraft* eine entscheidende Rolle. Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass auf eine bewegte Masse in einem uniform rotierenden System die Trägheitsbeschleunigung (Scheinbeschleunigung)

$$\vec{a}_R = -2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{u} - \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} , \quad (6.1)$$

berücksichtigt werden muss. In (6.1) ist der zweite Term die Zentrifugalbeschleunigung. Es zeigt sich, dass die horizontale Komponente der Zentrifugalbeschleunigung durch die horizontale Komponente von \vec{g} auf der durch $\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}$ abgeplatteten Erdoberfläche annähernd aufgehoben wird. Somit kann die Zentrifugalbeschleunigung gegenüber der Coriolisbeschleunigung für Horizontalbewegungen vernachlässigt werden.



Figur 6.1: Lokales kartesisches Koordinatensystem auf rotierender Kugel und Bezeichnungen

Die Bewegungsgleichungen, d.h. die Erhaltungsgleichungen für Impuls, Masse und Energie, müssen in Kugelkoordinaten oder in einem kartesischen Koordinatensystem, das die Eigenschaften der Kugelgestalt der Erde grob annähert, formuliert werden. Dabei denkt man sich auf einer vorgegebenen geographischen Breite φ eine Ebene tangential zur Oberfläche der Kugel (Fig. 6.1). Diese Ebene heisst *f-Ebene* oder *b-Ebene*, je nach den Näherungen, die angenommen werden (siehe unten). Auf dieser Ebene, die mit der rotierenden Kugel verbunden ist, wird ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) errichtet, in welchem die Gleichungen formuliert werden. Die Coriolisbeschleunigung ist in diesem System gegeben durch

$$\vec{a}_C = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cdot \cos \varphi \\ \Omega \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi \cdot v \\ -2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi \cdot u \\ 2 \cdot \Omega \cdot \cos \varphi \cdot u \end{pmatrix} , \quad (6.2)$$

wobei wir hier nur die horizontalen Bewegungen betrachten. In den beiden horizontalen Komponenten tritt der gemeinsame Faktor $f = 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi$ auf. Dies ist der *Coriolisparameter*, der wegen der Kugelgestalt von der Breite abhängt. Linearisierung von $f(\varphi)$ ergibt

$$f(\varphi) \approx 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi_0 + 2 \cdot \Omega \cdot \cos \varphi_0 \cdot (\varphi - \varphi_0) = f_0 + \frac{2 \cdot \Omega \cdot \cos \varphi_0}{R} \cdot y = f_0 + \beta \cdot y . \quad (6.3)$$

Berücksichtigt man nun in den Bewegungsgleichungen im (x,y,z) System nur f_0 , so spricht man von der *f-Ebene*. Verwendet man die lineare Näherung von (6.2) spricht man von der *b-Ebene*.

Man kann nun die Bewegungsgleichung aufschreiben, die sich aufgrund des 2. Newton'schen Gesetzes ergibt:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \bar{a}_c + \bar{a} , \quad (6.4)$$

wobei \bar{a} die äusseren Beschleunigungen enthält (Druck-, Reibungsbeschleunigungen), und D/Dt die *materielle Ableitung*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} , \quad (6.5)$$

bezeichnet. Wiederum sind die vertikalen Bewegungen vernachlässigt worden. In (6.4) muss die materielle Ableitung (auch als advektive Ableitung bezeichnet) verwendet werden, da die Flüssigkeit Impuls transportieren kann. Der Impuls ändert also nicht nur aufgrund von äusseren Kräften, sondern auch durch den advektiven Fluss von Impuls (siehe Kapitel 3.1). Somit können wir die Impulsbilanz schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi \cdot v &= a_x , \\ \frac{Dv}{Dt} + 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi \cdot u &= a_y . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die äusseren Beschleunigungskomponenten setzen sich aus dem Druckgradienten und der Reibung zusammen. Auf ein Massenelement, wie in Fig. 6.2 abgebildet, wirken Druck- und Reibungskräfte wie folgt:

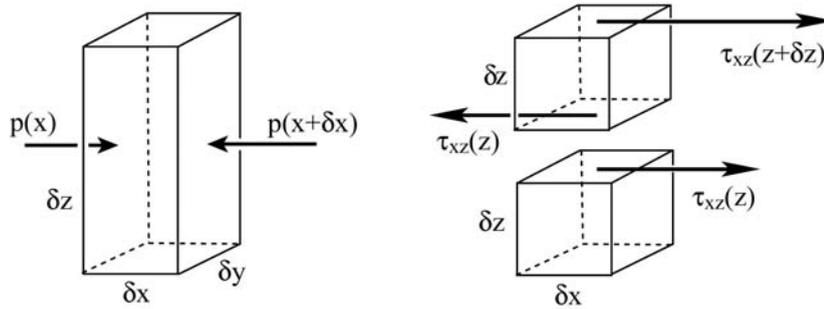
$$\rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot a_x = p(x) \cdot \delta y \cdot \delta z - p(x + \delta x) \cdot \delta y \cdot \delta z + \tau_{xz}(z + \delta z) \cdot \delta x \cdot \delta y - \tau_{xz}(z) \cdot \delta x \cdot \delta y .$$

Somit erhalten wir für die Komponenten der Beschleunigung

$$a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} , \quad a_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} . \quad (6.7)$$

Das Gleichungssystem (6.6) und (6.7) ist noch nicht vollständig. Die Erhaltung der Masse muss ebenfalls berücksichtigt werden. Für eine Flüssigkeit, die sich in einer Schicht der Dicke H horizontal bewegt, lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (H \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (H \cdot v)}{\partial y} = w , \quad (6.8)$$



Figur 6.2: Bezeichnungen des Druckes und der Schubspannungen zur Herleitung der Druckgradient- und Reibungsbeschleunigungen.

wobei η die vertikale Auslenkung der Flüssigkeitsoberfläche ist, und w ist eine vertikale Geschwindigkeit an der Unterseite der Flüssigkeitsschicht H . Ist die Unterseite gerade der flache Boden, so setzt man $w = 0$ in (6.8). Nun muss noch eine Beziehung zwischen der Auslenkung η und den Druckgradienten gefunden werden. Dabei verwendet man das hydrostatische Gleichgewicht

$$\delta p = -\rho \cdot g \cdot \delta z, \quad (6.9)$$

das von der Gleichgewichtsoberfläche (Flüssigkeit in Ruhe) bis zur aktuellen Oberfläche, die sich auf Höhe η befindet, integriert wird. Dies ergibt

$$p(\eta) - p(0) = p_L - p(0) = -\rho \cdot g \cdot (\eta - 0), \quad (6.10)$$

wobei p_L der konstante Luftdruck ist. Somit gilt

$$\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p = g \cdot \nabla \eta. \quad (6.11)$$

Wir erhalten nun ein vollständiges Gleichungssystem, indem wir (6.6) über die konstante Schichtdicke H integrieren, und mit (u, v) die gemittelten Geschwindigkeiten bezeichnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - f \cdot v &= -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot (\tau_{xz}(0) - \tau_{xz}(-H)), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + f \cdot u &= -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot (\tau_{yz}(0) - \tau_{yz}(-H)), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + H \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dabei sind die Unbekannten u, v , und η , und die Schubspannungen an Oberfläche ($z = 0$) und Boden ($z = -H$) sind gegeben. Das Gleichungssystem (6.12) muss noch mit entsprechenden Randbedingungen ergänzt werden.

6.2 Flachwassergleichungen als Spezialfall

Ausgehend von (6.12) kann nun ein einfacher Spezialfall betrachtet werden. Die nichtlinearen Terme sollen vernachlässigt werden, das Bezugssystem sei in Ruhe ($f = 0$), und die Flüssigkeit soll reibungsfrei sein. Somit vereinfacht sich (6.12) zu den sogenannten *Flachwassergleichungen*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + H \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.13)$$

Indem die Kontinuitätsgleichung nach t abgeleitet wird, und die Geschwindigkeiten substituiert werden, erhält man eine einzige Gleichung für die Oberflächenauslenkung:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \cdot H \cdot \nabla^2 \eta. \quad (6.14)$$

Bewegungen sind also harmonische, dispersionsfreie Wellen mit der Phasengeschwindigkeit $\sqrt{g \cdot H}$. Die Gleichung (6.14) gilt unabhängig von den gewählten Koordinaten.

Um Strömungen in Atmosphäre und Ozean zu berechnen, verwendet man in Klimamodellen Kugelkoordinaten. In (6.14) muss also diesem Falls der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten geschrieben werden. Im Ozean müssen Bedingungen an den Rändern von Ozeanbecken formuliert werden, in der Atmosphäre werden periodische Randbedingungen gefordert.

Die Berücksichtigung des Effektes der rotierenden Erde ($f \neq 0$) führt auf eine Wellengleichung analog zu (6.14), wobei nun die Phasengeschwindigkeit der Welle frequenzabhängig wird. Diese Gleichungen und die zugehörigen Wellen werden in der Vorlesung *Einführung in die Ozeandynamik* behandelt.

6.3 Verschiedene Typen von Gittern in Klimamodellen

Die auftretenden partiellen Differentialgleichungen, die die Dynamik in Klimamodellen beschreiben, müssen diskretisiert werden. Bisher haben wir die Annahme gemacht, dass sämtliche Grössen auf denselben Gitterpunkten ausgewertet werden. In den meisten Fällen ist dies jedoch nicht die beste Wahl. Es wird sich zeigen, dass andere Anordnungen von Gittern, die der Physik gerechter werden, zu wesentlich effizienteren Schemas führen. Dies wollen wir anhand der eindimensionalen Flachwassergleichungen erläutern.

Die Flachwassergleichungen in einer Dimension sind gegeben durch

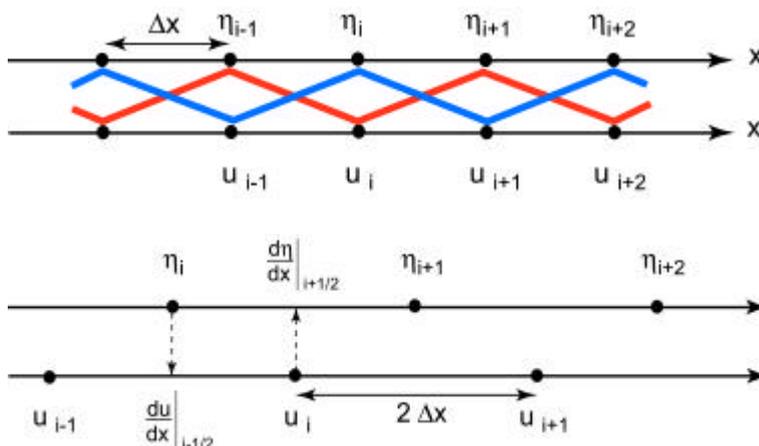
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.15)$$

wobei die beiden unbekanntenen Funktionen $u(x,t)$ und $\eta(x,t)$ zu bestimmen sind. Wählt man nun die übliche Diskretisierung im Raum gemäss $x = i \cdot \Delta x$, mit den Bezeichnungen $u_i \equiv u(i \cdot \Delta x, t)$, und $\eta_i \equiv \eta(i \cdot \Delta x, t)$, dann werden beide Funktionen auf identischen Gitterpunkten ausgewertet (Fig. 6.3a). Die diskretisierten Formen der Gleichungen (6.15) lauten dann

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \cdot \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}, \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -H \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}. \quad (6.16)$$

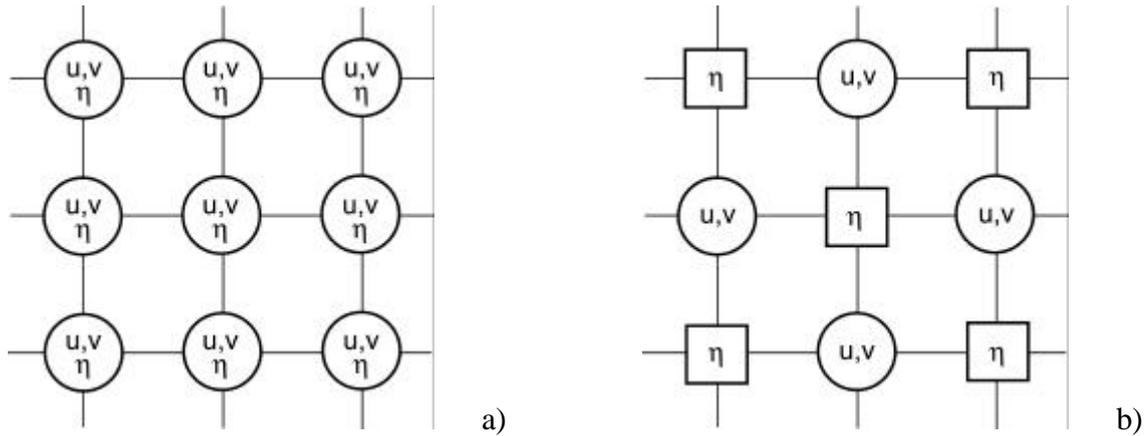
Aus Fig. 6.3a ist ersichtlich, dass die beiden Schemen auf zwei unabhängige Untergitter angewendet werden, wobei die beiden Lösungsvektoren (η_{2k}, u_{2k+1}) und (η_{2k+1}, u_{2k}) von einander unabhängig sind und keine Information zwischen ihnen ausgetauscht wird. Der Fehler der Schemata in (6.16) ist von der Ordnung $(\Delta x)^2$.

Man kann nun durch die Verschiebung der einen Achse in Fig. 6.3a ein versetztes Gitter (*staggered grid*) betrachten, das in Fig. 6.3b abgebildet ist. Dabei wurde eine doppelte Gitterweite gewählt, also müssen für beide Funktionen nur die Hälfte der Werte berechnet werden. Die diskretisierte Form der Gleichungen (6.15) lautet dann für dieses Gitter



Figur 6.3a: Einfaches Gitter für die Flachwassergleichungen. Alle Funktionen werden an denselben Stellen ausgewertet. Es entstehen zwei unabhängige Untergitter, die mit den Linien verbunden sind.

Figur 6.3b: Versetztes Gitter für die Flachwassergleichungen. Flussgrössen (u) und Volumengrössen (η) werden an unterschiedlichen Stellen ausgewertet (staggered grid).



Figur 6.4: (a) Zweidimensionales A-Gitter, in dem alle Funktionen an identischen Gitterstellen ausgewertet werden. (b) Zweidimensionales E-Gitter, wo Flussgrößen (u,v) und Volumengrößen (η) an verschiedenen Plätzen ausgewertet werden.

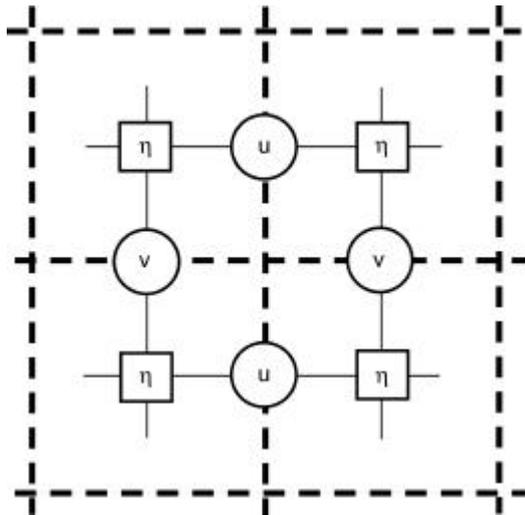
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{i+1/2} = -g \cdot \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2 \cdot \Delta x}, \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -H \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1/2} = -H \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}.$$

Dadurch, dass in (6.17) die Ableitungen an den Zwischenstellen ausgewertet werden, sind diese als eigentliche zentrale Differenzen mit einer äquivalenten Gitterbreite von Δx aufzufassen, obwohl die Indizes sich nur über unmittelbar benachbarte Gitterpunkte erstrecken. Somit haben die Schemata in (6.17) dieselbe Genauigkeit wie diejenigen in (6.16), wo doppelt so viele Werte berechnet werden müssen. Das versetzte Gitter bringt also für die vorliegenden Differentialgleichungen eine wesentliche Verbesserung.

Diese Erkenntnisse können auf zwei Dimensionen verallgemeinert werden. Dabei betrachten wir wiederum als Beispiel das Gleichungssystem (6.13), wo nun die drei unbekannt Funktionen $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ und $\eta(x,y,t)$ auf einem 2-dimensionalen Gitter berechnet werden müssen (Fig. 6.4). Werden alle Funktionen auf denselben Gitterpunkten ausgewertet (Fig. 6.4a), so bezeichnet man dies als A-Gitter (*Arakawa A-grid*). Ein E-Gitter (*Arakawa E-grid*) liegt vor, wenn die Geschwindigkeitskomponenten auf Punkten zwischen den η Punkten bestimmt werden (Fig. 6.4b).

Ein weiteres, sehr oft verwendetes Gitter ist das C-Gitter (*Arakawa C-grid*), bei dem die Geschwindigkeitskomponenten unterschiedlicher Richtung auf verschiedenen Gitterplätzen ausgewertet werden (Fig. 6.5). Dieses Gitter wird der Physik am besten gerecht, weil *Flussgrößen* (Geschwindigkeiten) auf den Rändern von Gitterboxen zu liegen kommen, währenddem *Volumengrößen* im Zentrum von Gitterboxen liegen.



Figur 6.5: Zweidimensionales C-Gitter, in dem Flussgrößen der verschiedenen Richtungen auf verschiedenen Plätzen ausgewertet werden, während die Volumengrößen dazwischen berechnet werden. Das gestrichelte Gitter illustriert die physikalische Bedeutung des C-Gitters. Die Volumengrößen befinden sich in den Zentren der Boxen, während die Flussgrößen (u, v) auf denjenigen Boxwänden placiert sind, auf denen sie *senkrecht* stehen.

Die Frage des Gittertyps spielt auch bei der Lösung des 1-dimensionalen Energiebilanzmodells (4.9) eine Rolle. Dies wird in einem Übungsproblem behandelt. Wir schreiben (4.9) vereinfacht als

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a + b \cdot T^4 + c \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(e \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi} \right), \quad (6.18)$$

mit ortsabhängigen Koeffizienten a, b, c, und e. In diesem Modell ist die Volumengröße die Temperatur, und die Flussgröße ist der meridionale Temperaturgradient. Wird nun ein A-Gitter verwendet (Fig. 6.6a), so lautet die diskretisierte Form von (6.18)

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i + b_i \cdot T_i^4 + c_i \cdot \frac{e_{i+1} \cdot T'_{i+1} - e_{i-1} \cdot T'_{i-1}}{2 \cdot \Delta \phi}, \quad (6.19)$$

$$T'_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2 \cdot \Delta \phi},$$

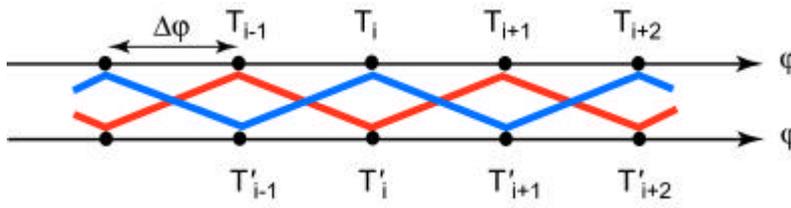
wobei wiederum (T_{2k}, T'_{2k+1}) und (T_{2k+1}, T'_{2k}) unabhängige Lösungsvektoren sind. Die Lösung wird auf zwei unabhängigen Untergittern bestimmt.

In einem C-Gitter (Fig. 6.6b) mit doppeltem Gitterabstand muss nun nur noch die Hälfte der Funktionen ausgewertet werden, und die diskretisierte Form lautet entsprechend

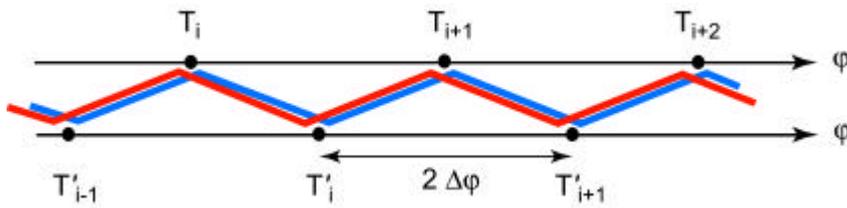
$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i + b_i \cdot T_i^4 + c_i \cdot \frac{e_i \cdot T'_i - e_{i-1} \cdot T'_{i-1}}{2 \cdot \Delta \phi}, \quad (6.20)$$

$$T'_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{2 \cdot \Delta \phi},$$

welche die identische Genauigkeit aufweist, aber nur halb soviel Rechenaufwand erfordert. Zudem ist die Implementation von Randbedingungen bezüglich der Flussgrößen (siehe 4.10) einfach, indem $T'_0 = 0$, und $T'_M = 0$ gesetzt werden können.



Figur 6.6a: A-Gitter für das 1-dimensionale Energiebilanzmodell. Das Schema (6.19) führt zur Lösung von (6.18) auf zwei unabhängigen Untergittern (Linien).



Figur 6.6b: C-Gitter für das 1-dimensionale Energiebilanzmodell.

6.4 Spektralmodelle

Wir schieben hier ein kurzes Kapitel über eine alternative Lösungsmethode von partiellen Differentialgleichungen in Kugelgeometrie ein. Bisher haben wir verschiedene Methoden der finiten Differenzen behandelt. Für globale Klimamodelle erstreckt sich der Integrationsbereich auf die Kugel, was die Möglichkeit eröffnet, spezielle Funktionen zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen zu Hilfe zu nehmen. Die Lösung von Gleichungen vom Typ (6.14) auf der Kugel wird deshalb oft im Spektralbereich durchgeführt. Solche Spektralmodelle kommen vor allem bei den Atmosphärenkomponenten von globalen Klimamodellen zum Einsatz. In globalen Ozeanmodellen werden sie wegen den Beckenrändern selten, und wenn, dann nur in der vertikalen Koordinate angewendet.

Anstatt über die Kugel ein Gitter zu legen, und die Differentialgleichung durch eine Gleichung in finiten Differenzen zu ersetzen, entwickelt man die gesuchte Funktion nach geeignet gewählten Basisfunktionen, die bereits gewisse Randbedingungen erfüllen.

Die Eigenfunktionen der Laplacegleichung auf der Kugel sind gegeben durch

$$\nabla^2 Y_\ell^m = -\frac{\ell \cdot (\ell + 1)}{R^2} \cdot Y_\ell^m, \quad (6.21)$$

mit

$$Y_\ell^m(\sin \varphi, \lambda) = P_\ell^m(\sin \varphi) \cdot e^{i \cdot m \cdot \lambda}, \quad (6.22)$$

wobei P_ℓ^m zugeordnete Legendre Funktionen der 1. Art sind. Die Grössen m und ℓ sind Wellenzahlen: $2 \cdot m$ ist die Anzahl Knoten-Meridiane (d.h. Nullstellen auf einem Breitenkreis), $\ell - m$ ist die Anzahl Knoten-Breitenkreise ohne die beiden Pole. Folgende Orthogonalitätsbeziehung gilt

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-1}^1 d(\sin \varphi) \int_0^{2\pi} d\lambda \cdot Y_\ell^m \cdot Y_{\ell'}^{m'} = \begin{cases} 1 & m = m', \ell = \ell' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6.23)$$

das heisst, (6.22) bildet eine vollständige Basis.

Die gesuchte Lösung von (6.14) wird nun nach den Funktionen $Y_\ell^m(\varphi, \lambda)$ mit zeitabhängigen Koeffizienten $\Phi_\ell^m(t)$ entwickelt:

$$\eta(t, \varphi, \lambda) = \sum_{|m| \leq \ell} \sum_{\ell} \Phi_\ell^m(t) \cdot Y_\ell^m(\varphi, \lambda), \quad (6.24)$$

und in (6.14) eingesetzt.

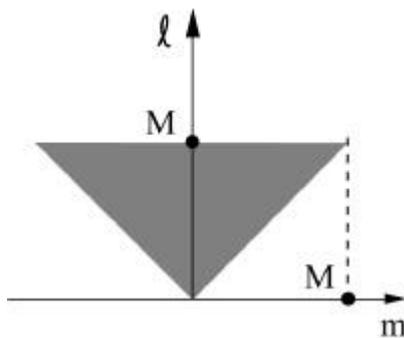
Unter Verwendung von (6.15) ergeben sich somit für die Koeffizientenfunktionen gewöhnliche Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{d^2 \Phi_\ell^m}{dt^2} = -\ell \cdot (\ell + 1) \cdot \frac{g \cdot H}{R^2} \cdot \Phi_\ell^m \quad (6.25)$$

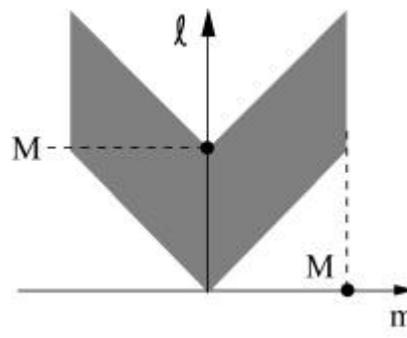
Die partielle Differentialgleichung (6.14) wurde also durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzt. Die Wahl der Basisfunktionen erfüllt bereits einige der Randbedingungen. Diese Prozedur ist die Essenz der spektralen Modelle.

Die Behandlung der nicht-linearen Terme, und der Terme, die die Corioliseffekte beschreiben, macht die Formulierung der spektralen Modelle wesentlich komplizierter und es treten Kopplungen zwischen den einzelnen Wellenzahlen auf.

Die Entwicklung in (6.24) erstreckt sich theoretisch von $\ell = 0, \dots, \infty$, $m = -\ell, \dots, +\ell$, doch in der Praxis muss die Summation an geeigneter Stelle abgebrochen werden. Die am häufigsten verwendeten sind *triangular* und *rhomboidal*, schematisch dargestellt in Fig. 6.7.



Figur 6.7a: Triangular truncation



Figur 6.7b: Rhomboidal truncation

$$\eta(t, \varphi, \lambda) = \sum_{m=-M}^M \sum_{\ell=|m|}^M \Phi_\ell^m(t) \cdot Y_\ell^m(\varphi, \lambda)$$

Bezeichnung: T(M)

Beispiele: T21, T31, T42, T106

$$\eta(t, \varphi, \lambda) = \sum_{m=-M}^M \sum_{\ell=|m|}^{|m|+M} \Phi_\ell^m(t) \cdot Y_\ell^m(\varphi, \lambda)$$

Bezeichnung: R(M)

Beispiele: R15, R21, R30

Die frühen GCMs verwendeten R15 und R21. Die für die Atmosphäre wichtigen transienten Eddies können mit R15 gerade noch knapp aufgelöst werden, doch ist die betragsmässige Aufteilung des meridionalen Wärmetransports in der Atmosphäre nicht realistisch simuliert. Dies ist mit ein Grund, weshalb gekoppelte Modelle mit niedriger Auflösung Flusskorrekturen (siehe Kap. 8.6) benötigen. Die höchste heute verwendete Auflösung für globale Klimasimulationen ist T106. Resultate einer solchen Simulation wurden bereits in Fig. 2.3 gezeigt.

6.5 Windgetriebene Strömung im Ozean (Stommel Modell)

6.5.1 Bestimmung der Stromfunktion

Seit Beginn der interkontinentalen Schifffahrt im 15. Jahrhundert ist bekannt, dass die Oberflächenströmung auf dem Ozean in gross-skalige Wirbel (subtropischer Wirbel im Uhrzeigersinn, subpolarer Wirbel im Gegenuhrzeigersinn) aufgeteilt ist. Diese Wirbel sind räumlich nicht uniform, sondern weisen auf ihrer westlichen Seite starke Strömungen auf, während sie im Osten schwach sind. Der bekannte Golfstrom ist Teil dieses Systems und wird zum Transatlantik-Driftstrom, sobald er sich von der amerikanischen Ostküste gelöst hat. Sein Einfluss reicht bis nördlich von Spitzbergen. Der Kuroshio, der Brasilienstrom, und weitere, bilden dynamisch ähnliche Stromsysteme. Die Ostwinde im nördlichen Bereich, und die ausgeprägten Westwinde in mittleren Breiten waren als Ursache dieser Strömung rasch erkannt. Das dynamische Problem, weshalb die Strömung nur im Westen intensiviert ist, wurde aber erst 1948 von Henry Stommel gelöst (Stommel, 1948, *Trans. Am. Geophys. Union* 29, 202). Er zeigte anhand eines eleganten Modells, dass die Kugelgestalt der rotierenden Erde für dieses Phänomen verantwortlich ist.

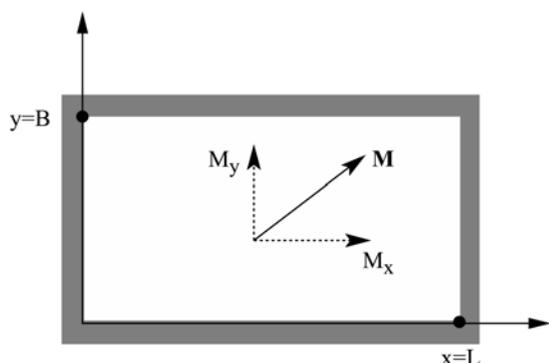
Wir betrachten nun eine homogene Flüssigkeit ($\rho = \text{konst}$) in einem flachen Rechteckbecken (Fig. 6.4) auf der β -Ebene. Multiplikation von (6.6) und (6.7) mit ρ , Integration über die gesamte Tiefe, und die Annahme der Stationarität $\partial/\partial t = 0$, und Linearität, ergibt

$$-f \cdot \int_{-H}^0 \rho \cdot v \cdot dz = - \int_{-H}^0 \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dz + \tau_{xz}(0) - \tau_{xz}(-H) , \quad (6.26)$$

$$f \cdot \int_{-H}^0 \rho \cdot u \cdot dz = - \int_{-H}^0 \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dz + \tau_{yz}(0) - \tau_{yz}(-H) .$$

Wir definieren nun den Massentransport folgendermassen:

$$\vec{M} = \int_{-H}^0 \rho \cdot \vec{u} \cdot dz , \quad (6.27)$$



Figur 6.8: Beckengeometrie und Bezeichnungen im erdverbundenen kartesischen Koordinatensystem.

und substituieren dies in (6.26). Aus (6.26) ist ersichtlich, dass der Massentransport durch die Schubspannungen an der Oberfläche angetrieben und am Boden gebremst wird. An der Oberfläche kann somit die Wirkung des Windes berücksichtigt werden, der Impuls auf die Flüssigkeit überträgt. Der Impulsfluss in das Fluid muss nun durch innere Reibung, oder Reibung am Boden übernommen werden. Stommel wählte die einfachst mögliche Parametrisierung dieses Effektes, indem er postulierte, dass die Bodenschubspannung proportional zur Geschwindigkeit, bzw. dem Massentransport ist. Also wird aus (6.26)

$$-f \cdot M_y = - \int_{-H}^0 \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dz + \tau_{xz} - R \cdot M_x, \quad (6.28)$$

$$f \cdot M_x = - \int_{-H}^0 \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dz + \tau_{yz} - R \cdot M_y,$$

wobei R eine inverse charakteristische Zeit ist, während welcher die Strömung durch Reibung zur Ruhe kommt. Durch Kreuzdifferenzieren, $\partial(6.28b)/\partial x - \partial(6.28a)/\partial y$, können nun die Druckgradient-Terme eliminiert werden. Unter Berücksichtigung von (6.3) erhält man

$$\beta \cdot M_y + f \cdot \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - R \cdot \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right). \quad (6.29)$$

Die beiden unbekanntenen Komponenten des Massentransports sind nicht unabhängig, denn im geschlossenen Becken muss die Massenerhaltung erfüllt sein. Aus der vertikalen Integration von (6.8) folgt, dass

$$\nabla \cdot \vec{M} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.30)$$

womit man die gesuchte Vektorfunktion \vec{M} durch einen Skalar wie folgt ersetzen kann:

$$M_x = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad M_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (6.31)$$

Die skalare Funktion $\Psi(x, y)$ heisst *Stromfunktion*. Linien konstanter Stromfunktion sind Stromlinien, entlang welcher die Strömung tangential verläuft. Mit der Definition (6.25) ist (6.30) automatisch erfüllt, und man kann nun (6.31) in (6.29) verwenden, um die Gleichung von Stommel (1948) zu erhalten:

$$\beta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - R \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right). \quad (6.32)$$

Diese Gleichung erklärt das Phänomen der westlichen Randströme in einem Ozeanbecken grundsätzlich, wie wir anhand der Lösungen sehen, die in Fig. 6.9 dargestellt sind. Gleichung (6.32) ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in x und y für die Funktion $\Psi(x, y)$.

Nun müssen noch Randbedingungen formuliert werden. Da der Transport parallel zu den Rändern gerichtet sein muss, gilt $M_x = -\partial \Psi / \partial y = 0$ in y -Richtung und $M_y = \partial \Psi / \partial x = 0$ in x -Richtung. Somit muss Ψ konstant sein auf dem Rand. Da aber (6.32) nur Ableitungen von Ψ enthält, können wir ohne Einschränkung

$$\Psi = 0 \quad \text{auf dem Rand,} \quad (6.33)$$

fordern. (6.32) ist also ein Randwertproblem mit *Dirichlet Randbedingungen*. Zur Lösung muss noch die Schubspannung des Windes, der die Strömung antreibt, festgelegt werden. Für speziell einfache örtliche Abhängigkeiten der Schubspannung kann das Randwertproblem sogar analytisch gelöst werden. Stommel wählte einen rein zonal gerichteten Wind:

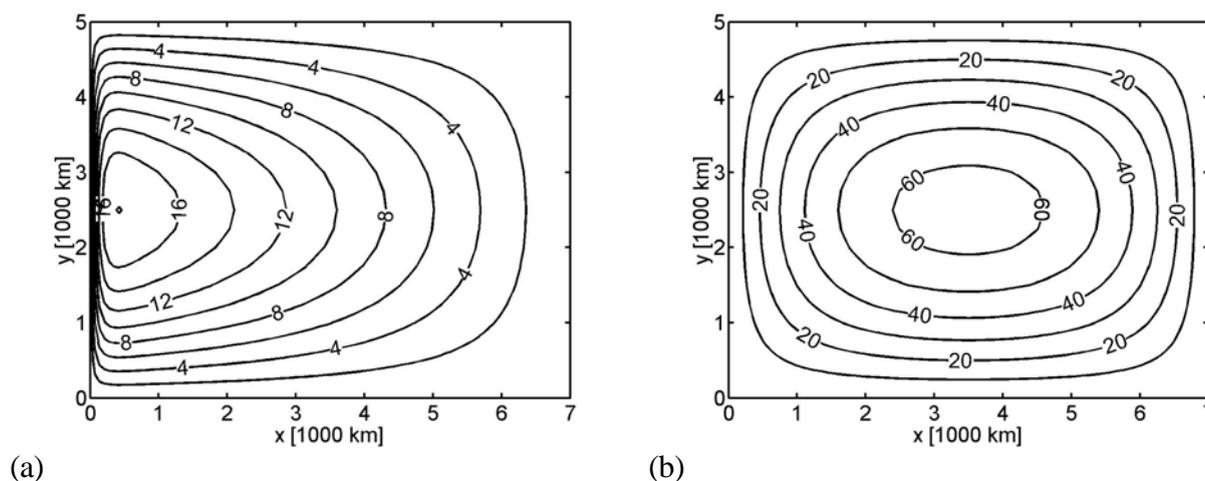
$$\tau_{xz} = -T \cdot \cos\left(\frac{\pi}{B} \cdot y\right), \quad \tau_{yz} = 0, \quad (6.34)$$

womit (6.32) durch Separation der Variablen einfach zu lösen ist. Für allgemeine Profile der Windschubspannungen müssen die numerischen Methoden verwendet werden, die in Kapitel 5 vorgestellt wurden.

Die numerischen Lösungen von (6.32) in einem Rechteckbecken im Bereich $0 \leq x \leq 7000$ km und $0 \leq y \leq 5000$ km sind in Fig. 6.9 gezeigt. Auf einer β -Ebene bildet sich ein westlicher Randstrom aus; für $\beta = 0$ resultiert eine symmetrische Lösung, die keinen Randstrom aufweist. Der westliche Randstrom tritt in diesem Modell auf, sobald der Coriolisparameter f breitenabhängig ist, also die Kugelgestalt der Erde berücksichtigt wird. Falls ein Randstrom vorliegt, werden die Ableitungen der Stromfunktion nach x in (6.32) am Rand dominant. Indem man nun eine typische Breite des Randstroms δ annimmt, und den Ansatz $\Psi \sim e^{-x/\delta}$ in (6.32) einsetzt, findet man

$$\beta \cdot \left(-\frac{1}{\delta}\right) \sim -R \cdot \left(\frac{1}{\delta^2}\right), \quad \text{also} \quad \delta \sim \frac{R}{\beta}. \quad (6.35)$$

Die Breite des Randstromes (*Stommel boundary layer*) skaliert mit dem Reibungskoeffizienten und ist invers proportional zu β .



Figur 6.9: Stromfunktion Ψ [in Sverdrup, $1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$] des Stommel-Modells (6.32) für $\beta = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (Fig. 6.9a), und $\beta = 0$ (Fig. 6.9b), mit $R = 1/(6 \text{ Tage})$, und $T = 0.1 \text{ Nm}^{-2}$ in (6.34). Die numerische Lösung wurde auf einem Gitter mit $(N_x = 100) \times (N_y = 20)$ mit Successive Overrelaxation (5.21) berechnet. Die Strömung fließt parallel zu den Stromlinien im Uhrzeigersinn.

6.5.2 Bestimmung der Auslenkung der Wasseroberfläche

Bei der windgetriebenen Strömung treten gemäss (6.28) auch Druckgradienten auf, die sich nach (6.11) als Auslenkung der Wasseroberfläche manifestieren. Diese sollen nun ebenfalls bestimmt werden. Das wird auf ein Randwertproblem mit *Neumann Randbedingungen* führen.

Analog zu (6.27) definieren wir den tiefenintegrierten Druck

$$P = \int_{-H}^0 p \cdot dz \quad , \quad (6.36)$$

und bilden $\partial(6.28a)/\partial x + \partial(6.28b)/\partial y$. Unter Verwendung von (6.30), und (6.31) erhält man für $P(x,y)$ folgende Poissongleichung

$$\nabla^2 P = f \cdot \nabla^2 \Psi + \beta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad . \quad (6.37)$$

Mit der speziellen Wahl des Windschubes (6.34) fallen die letzten beiden Terme in (6.37) weg. Die Randbedingungen für $P(x,y)$ können aus (6.28), und der Tatsache, dass der Transport parallel zu den Rändern erfolgen muss, hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= f \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \tau_{xz} \quad , & \text{bei } x=0 \text{ und } x=L \quad , \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= f \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \tau_{yz} \quad , & \text{bei } y=0 \text{ und } y=B \quad . \end{aligned} \quad (6.38)$$

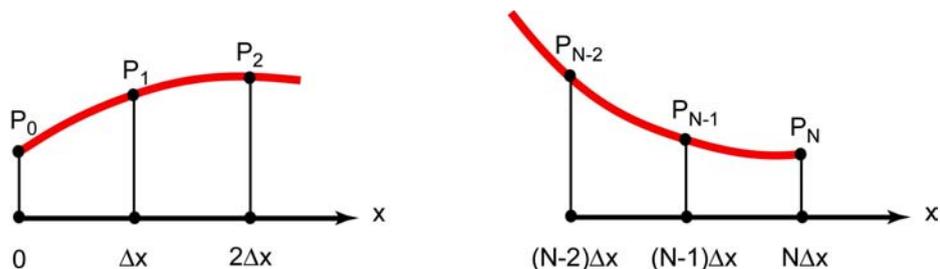
Damit sind die Ableitungen von P senkrecht zum Rand festgelegt (Neumann Randbedingungen). Es ist zu beachten, dass (6.37) und (6.38) die Lösung nur bis auf eine Konstante berechnen.

Wird $P(x,y)$ aus (6.37) mit (6.38) berechnet, so können wir unter Verwendung von (6.11) die Auslenkung der Wasseroberfläche bestimmen:

$$\eta(x,y) = \frac{1}{\rho \cdot g \cdot H} \cdot P(x,y) \quad . \quad (6.39)$$

Die numerische Lösung eines Randwertproblems mit Neumann Randbedingungen erfordert noch einige zusätzliche Erklärungen. Während bei Dirichlet Randbedingungen wie z.B. (6.33) die Randwerte im numerischen Verfahren einfach eingesetzt werden können, wird bei Neumann Randbedingungen wegen den Ableitungen auch Information an Nachbarpunkten vom Rand zur Bestimmung der Randwerte benötigt.

Wir leiten jetzt die diskretisierten Schemen zur Bestimmung der Randwerte im Fall von Neumann Randbedingungen her. Das hier gezeigte Verfahren kann ebenfalls auf Cauchy Bedingungen angewendet werden. Die Idee besteht darin, die Ableitungen am Rand durch



Figur 6.10: Interpolation der Lösungsfunktion am Rand mit Hilfe von Parabeln

die Werte der Gitterpunkte im Innern, und die Annahme einer geeigneten Interpolation, zu berechnen. Hier nehmen wir eine parabolische Interpolation an. Es genügt, die Überlegungen für die Ränder $x = 0$ und $x = L$ zu erklären; die entsprechenden Formulierungen auf den anderen Rändern folgen analog.

In x -Richtung soll die Diskretisierung $\Delta x = L/N$, mit $x = i \cdot \Delta x$ gewählt werden. Wir werten die Lösungsfunktion $P(x)$ auf den Gitterpunkten aus, d.h. $P(i \cdot \Delta x) \equiv P_i$, wobei P_0 und P_N auf dem Rand bei $x = 0$ und $x = L$ liegen sollen (Fig. 6.10). Durch die drei randnächsten Punkte soll nun eine Parabel gelegt werden. Für die Punkte bei $x = 0$ wählen wir den Ansatz

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + P_0. \quad (6.40)$$

Damit die Parabel durch die Werte P_1 und P_2 geht, muss gelten

$$P_1 = a \cdot (\Delta x)^2 + b \cdot (\Delta x) + P_0 \quad \text{und} \quad P_2 = a \cdot (2\Delta x)^2 + b \cdot (2\Delta x) + P_0, \quad (6.41)$$

und analog für den Rand bei $x = L$. Aus (6.41) erhalten wir die Koeffizienten der Interpolationsparabel gemäss

$$a = \frac{P_2 - 2 \cdot P_1 + P_0}{2 \cdot (\Delta x)^2} \quad b = \frac{-P_2 + 4 \cdot P_1 - 3 \cdot P_0}{2 \cdot \Delta x}. \quad (6.42)$$

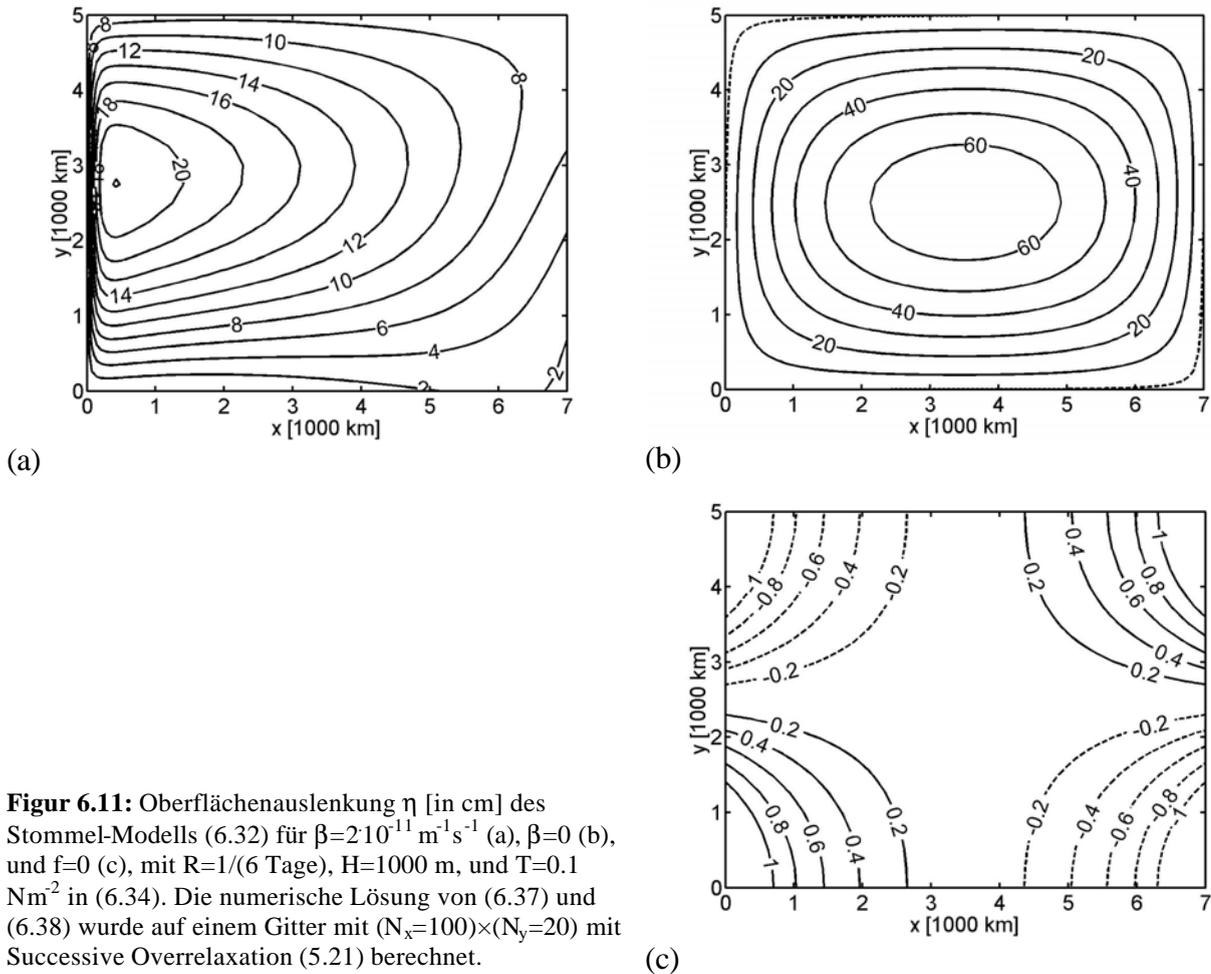
Die erste Ableitung am Rand kann jetzt mit Hilfe von (6.40) berechnet werden:

$$y' \Big|_{x=0} = b. \quad (6.43)$$

Ist also die *Ableitung* an den Rändern durch eine Randbedingung fest gegeben, so können wir (6.42) und (6.43) verwenden, um den Wert der Funktion am Rand zu berechnen. Wir erhalten

$$P_0 = \frac{4 \cdot P_1 - P_2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \Delta x \cdot (y' \Big|_{x=0}), \quad (6.44)$$

$$P_N = \frac{4 \cdot P_{N-1} - P_{N-2}}{3} + \frac{2}{3} \cdot \Delta x \cdot (y' \Big|_{x=L}).$$



Figur 6.11: Oberflächenauslenkung η [in cm] des Stommel-Modells (6.32) für $\beta=2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (a), $\beta=0$ (b), und $f=0$ (c), mit $R=1/(6 \text{ Tage})$, $H=1000 \text{ m}$, und $T=0.1 \text{ Nm}^{-2}$ in (6.34). Die numerische Lösung von (6.37) und (6.38) wurde auf einem Gitter mit $(N_x=100) \times (N_y=20)$ mit Successive Overrelaxation (5.21) berechnet.

Die numerische Lösung von (6.37), die für verschiedene Parameterwerte in Fig. 6.11 abgebildet ist, wurde im Inneren des Bereichs mit Successive Overrelaxation gemäss (5.21) berechnet. Dabei muss $\Psi(x, y)$ vorgängig durch die Lösung des Dirichlet Randwertproblem (6.32) bestimmt werden. Die Randbedingungen (6.38) werden dann durch die Berechnung der Randwerte nach (6.44) berücksichtigt.

Gemäss Fig. 6.9 ist die Strömung im Uhrzeigersinn. Im westlichen Randstrom sind Druckgradient-, Coriolis- und Reibungskräfte mit dem Windschub im Gleichgewicht (Fig. 6.11a). Auf einer f -Ebene (Fig. 6.11b) ist die Strömung näherungsweise im geostrophischen Gleichgewicht (Corioliskräfte werden hauptsächlich durch Druckgradienten balanciert, Reibung kompensiert Windschub). Es ist zu beachten, dass wegen der Reibung die Strömung nicht exakt entlang den Linien konstanten Drucks verläuft, obwohl $\nabla^2 P = f \cdot \nabla^2 \Psi$ im Innern des Bereichs gilt. Die Ursache dafür sind die unterschiedlichen Randbedingungen für P und Ψ . Falls das Bezugssystem nicht rotiert (Fig. 6.11c), erfolgt die meridionale Strömung in Richtung des negativen Druckgradienten, und die zonale Strömung kann dank dem zonalen Windschub entgegen dem negativen Druckgradienten "bergauf" fließen.

6.6 Potentielle Vorticity: eine wichtige Erhaltungsgrösse

Erhaltungssätze sind fundamentale Aussagen in der Physik und ermöglichen ein vertieftes Verständnis der Dynamik von Prozessen. Auch in der geophysikalischen Fluidodynamik, und in der Klimamodellierung, sind Erhaltungssätze und Erhaltungsgrössen wichtig. Es soll nun aus den Impulsgleichungen (6.6) eine Erhaltungsgleichung für gross-skalige Strömungen hergeleitet werden.

Wasser bewege sich in einer Schicht der Dicke $H(x,y)$, in der eine konstante Dichte ρ vorliegt. Dieser Wahl liegt die Tatsache zugrunde, dass Wasser sich leicht entlang Flächen konstanter Dichte (Isopyknen) verschieben lässt, dass aber Energie zur Verschiebung von Wasser *zwischen* Isopyknen notwendig ist. Die Grösse $\rho \cdot H(x,y)$ ist dann die Masse pro Flächeneinheit in dieser Schicht, für die man eine Kontinuitätsgleichung aufschreiben kann:

$$\frac{\partial(\rho \cdot H)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \rho \cdot H) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot \rho \cdot H) = Q, \quad (6.45)$$

wobei kein Diffusionsfluss von Masse stattfindet, dafür aber Masse mit der Rate Q [$\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$] zu oder abgeführt werden kann. Q stellt den *cross-isopycnal mass flux* dar. Aus (6.45) erhalten wir, unter Verwendung der Definition (6.5)

$$\frac{DH}{Dt} + H \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{Q}{\rho}. \quad (6.46)$$

Wir definieren nun die *relative Vorticity* ζ als

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{z} \cdot (\text{rot } \vec{u}); \quad (6.47)$$

man kann zeigen, dass die relative Vorticity ζ gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit eines infinitesimalen Wirbels ist. Nach Kreuzdifferenzieren von (6.6) erhält man

$$\frac{D}{Dt}(\zeta + f) = \underbrace{-(\zeta + f) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{KON}} + \underbrace{\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}}_{\text{PRO}}, \quad (6.48)$$

wobei die Änderung der *absoluten Vorticity* $\zeta + f$, durch Konvergenz absoluter Vorticity (KON), oder durch Produktion (PRO) aufgrund von Reibung oder äusseren Kräften erfolgt. Mit (6.46) kann KON vereinfacht werden, und man findet nach Umformen

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \frac{\zeta + f}{H} = -\frac{\zeta + f}{H} \cdot \frac{Q}{\rho \cdot H} + \frac{1}{H} \cdot \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)} \quad (6.49)$$

Richtung der Strömung	$\rho \cdot H \cdot \frac{D\zeta}{Dt}$	$\rho \cdot H \cdot \frac{Df}{Dt}$	$-\frac{\partial \tau_x}{\partial y}$	$-R \cdot \frac{\partial M_y}{\partial x}$	$+R \cdot \frac{\partial M_x}{\partial y}$
N → S	≈ 0	< 0	< 0	≈ 0	≈ 0
S → N	≈ 0	> 0	< 0	≫ 0	≈ 0

Tabelle 6.1: Vorzeichen der einzelnen Terme in (6.50) für das Stommel-Modell. Der für den Randstrom verantwortliche Term ist grau gekennzeichnet.

Die Grösse $(\zeta + f)/H$ heisst *potentielle Vorticity*. Falls keine Masse zu- oder abgeführt wird, und keine äusseren Kräfte, oder Reibung wirken, ist die potentielle Vorticity für ein Wasserpaket erhalten.

Mit Hilfe von (6.49) kann man die windgetriebene Strömung von Kapitel 6.5 elegant verstehen. Im Stommel-Modell wurde ein geschlossenes, flaches Becken betrachtet, also $Q = 0$ und H konstant. Dazu integrieren wir (6.49) über die Schichtdicke H , und setzen für a_x und a_y die rechte Seite von (6.28) ein:

$$\rho \cdot H \cdot \frac{D\zeta}{Dt} + \rho \cdot H \cdot \frac{Df}{Dt} = -\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - R \cdot \frac{\partial M_y}{\partial x} + R \cdot \frac{\partial M_x}{\partial y}, \quad (6.50)$$

und gemäss Stommel-Modell $\tau_y = 0$. Eine Abschätzung der einzelnen Terme in (6.50) zeigt für die gross-skalige Zirkulation mit typischen Längenskalen von 10^6 m die in Tab. 6.1 dargestellten Verhältnisse.

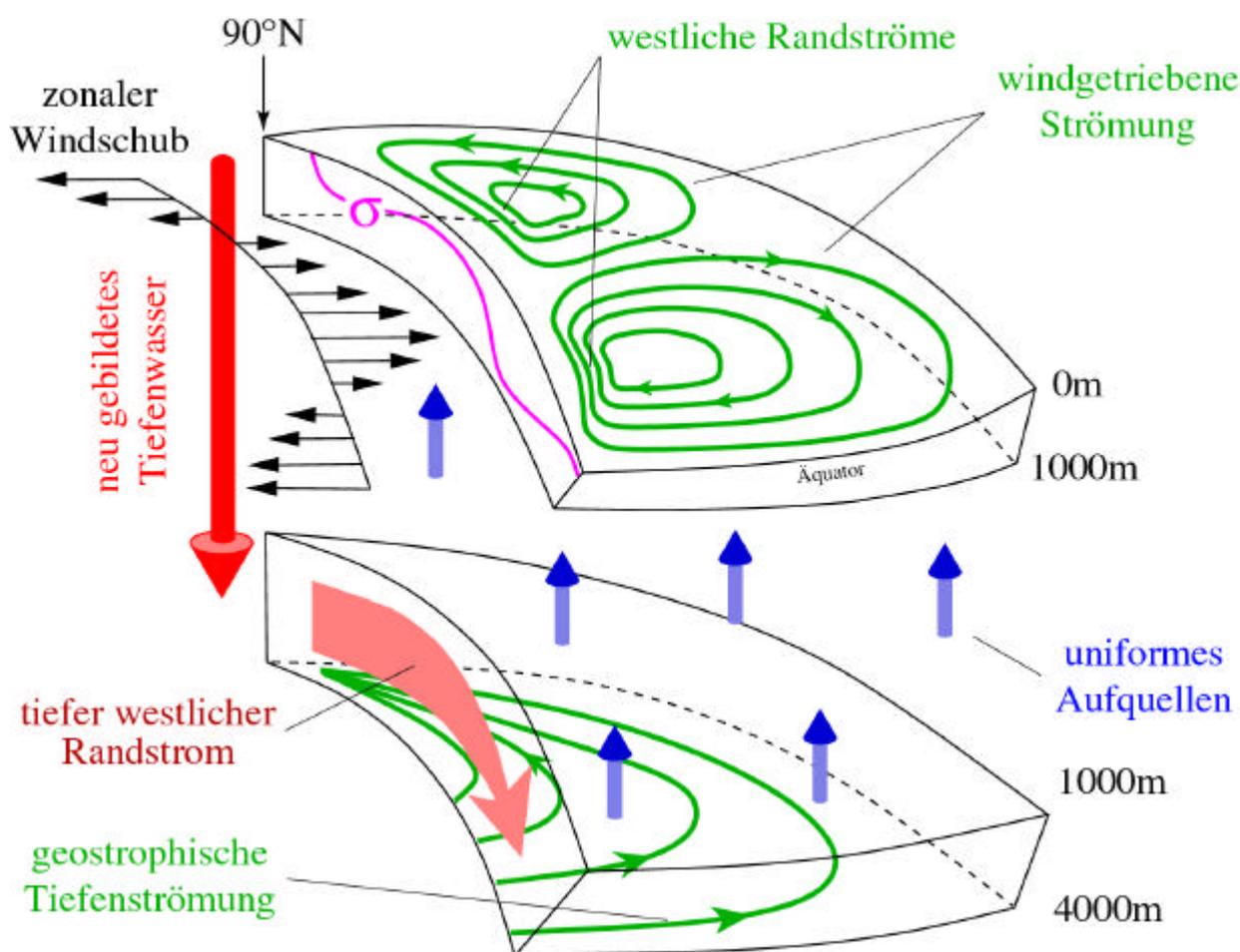
Ein starker Randstrom tritt nur von Süden nach Norden auf, denn in diesem Fall kann die Vorticity-Bilanz aufgrund der Vorzeichen der übrigen Terme einzig durch einen starken Gradienten des nordwärtigen Transports M_y geschlossen werden: $-\partial M_y / \partial x \gg 0$ ist aber nur am westlichen Rand des Beckens möglich. Im Randstrom wird durch Reibung soviel positive Vorticity erzeugt, dass der Input negativer Vorticity aufgrund des Windschubs überkompensiert wird, und somit die Bewegung des Wasserpakets von Süd nach Nord ermöglicht wird.

Auch die Tiefenzirkulation wurde von H. Stommel mit einem ähnlichen Modell untersucht (1958, *Deep Sea Research* 5, 80) und wird allgemein als Stommel-Arons Modell bezeichnet, das in zwei klassischen Arbeiten vorgestellt wurde (Stommel & Arons, 1960, *Deep Sea Research* 6, 140 und 217). Diese Arbeiten führten zur erstaunlichen Voraussage, dass sich im Atlantik auf ca. 2-3 km Tiefe ein westlicher Randstrom befinden muss, der von Norden nach Süden strömt! Dieser wurde daraufhin gezielt gesucht, und schliesslich mit Strömungsmessgeräten auch gefunden. Maximale Geschwindigkeiten betragen im Kern auf 2500 m Tiefe ca. 20 cm/s. In der Tiefe ist die Wirkung des Windes vernachlässigbar, doch muss der Massenfluss berücksichtigt werden. Stommel postulierte eine grossflächige, extrem langsame Aufwärtsbewegung im tiefen Ozean, um die in den polaren Gegenden stattfindende Tiefenwasserbildung zu kompensieren. Das bedeutet, dass Wasser die Schicht H verlässt, und somit $Q < 0$ in (6.49). Analog kann nun Tabelle 6.2 aufgestellt werden.

Richtung der Strömung	$\rho \cdot H \cdot \frac{D\zeta}{Dt}$	$\rho \cdot H \cdot \frac{Df}{Dt}$	$-(\zeta + f) \cdot Q$	$-R \cdot \frac{\partial M_y}{\partial x}$	$+R \cdot \frac{\partial M_x}{\partial y}$
N \rightarrow S	≈ 0	< 0	> 0	$\ll 0$	≈ 0
S \rightarrow N	≈ 0	> 0	> 0	≈ 0	≈ 0

Tabelle 6.2: Vorzeichen der Terme in (6.50) für das Stommel-Arons Modell auf der Nordhemisphäre. Der für den Randstrom verantwortliche Term ist grau gekennzeichnet.

Die Vorticity-Bilanz verlangt nun einen tiefen, westlichen Randstrom, der nach Süden fließt. Dieser versorgt die innere geostrophische Strömung mit Wasser und verliert so kontinuierlich an Stärke. Gerade diese Voraussage wurde bisher durch Beobachtungen widerlegt, was auf ein viel komplizierteres Strömungsbild in der Tiefe schliessen lässt. Zusammenfassend kann die Struktur der Strömung in Nordatlantik schematisch wie in Figur 6.12 dargestellt werden.



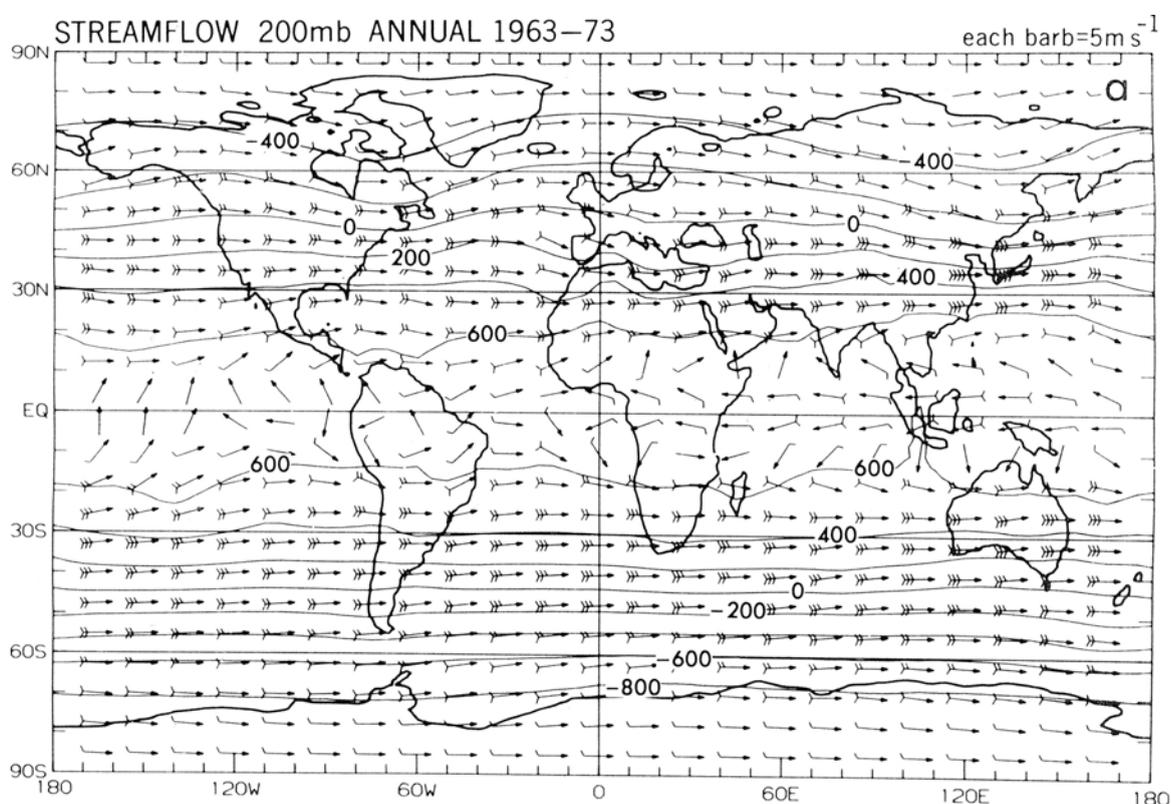
Figur 6.12: Schematische Darstellung der grossskaligen Strömung im Nordatlantik aufgrund der Stommel, und Stommel-Arons Modelle.

7 Gross-skalige Zirkulation in der Atmosphäre

7.1 Zonale und meridionale Zirkulation

In diesem Kapitel stellen wir in vereinfachter Form die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre vor. Eine detailliertere Beschreibung der Dynamik der Atmosphäre ist in Holton (1992, *An Introduction to Dynamical Meteorology, Third Edition*) zu finden.

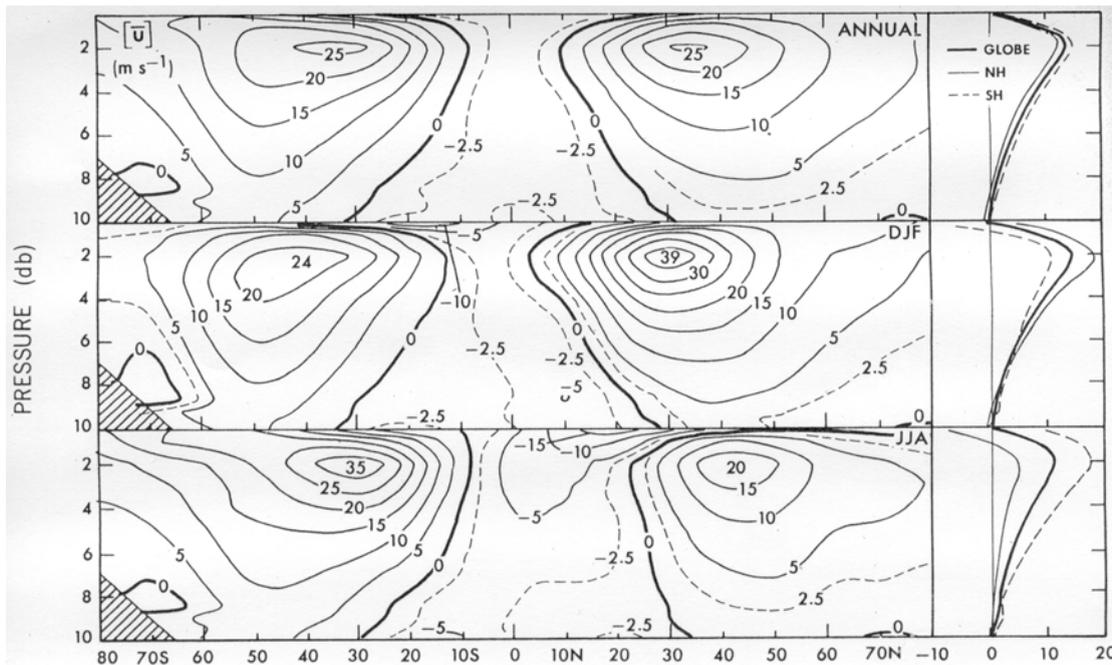
Wie bereits bei der Untersuchung der meridionalen Wärmeflüsse, ist auch hier die Betrachtung von zonal und zeitlich gemittelten Grössen und deren Abweichungen nützlich. Die zeitliche Mittelung filtert das Wettergeschehen heraus. So kann die allgemeine Zirkulation aufgeteilt werden in eine quasi-stationäre Komponente, in eine monsunale Komponente, die ihre Richtung im Laufe eines Jahres wechselt, und eine Komponente, die die niederfrequenten Variationen enthält.



Figur 7.1: Mittlerer Wind auf ca. 12 km Höhe. (Figur aus Peixoto & Oort, 1982).

Die mittlere Strömung in der Atmosphäre ist hauptsächlich zonal gerichtet: die grössten Geschwindigkeitsbeträge treten in West-Ost Richtung auf (Fig 7.1 und 7.2). Dies ist eine Folge der Drehimpulserhaltung für Luftmassen, deren Bewegung durch die meridionale Temperaturverteilung angetrieben wird.

Der spezifische Drehimpuls, also Drehimpuls pro Masse: $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$, eines Luftpaketes, das sich relativ zur rotierenden Erde mit einer Geschwindigkeit u entlang der geographischen Breite φ bewegt, ist gegeben durch



Figur 7.2: Mittlerer Wind in ms^{-1} in einem meridionalen Schnitt durch die Atmosphäre. Deutlich erkennbar sind die starken West-Ost Jets in der Nord- und Südhemisphäre auf ca. 12 km Höhe. (Figur aus Peixoto & Oort, 1982).

$$L = (\Omega \cdot R \cdot \cos \varphi + u) \cdot R \cdot \cos \varphi \quad , \quad (7.1)$$

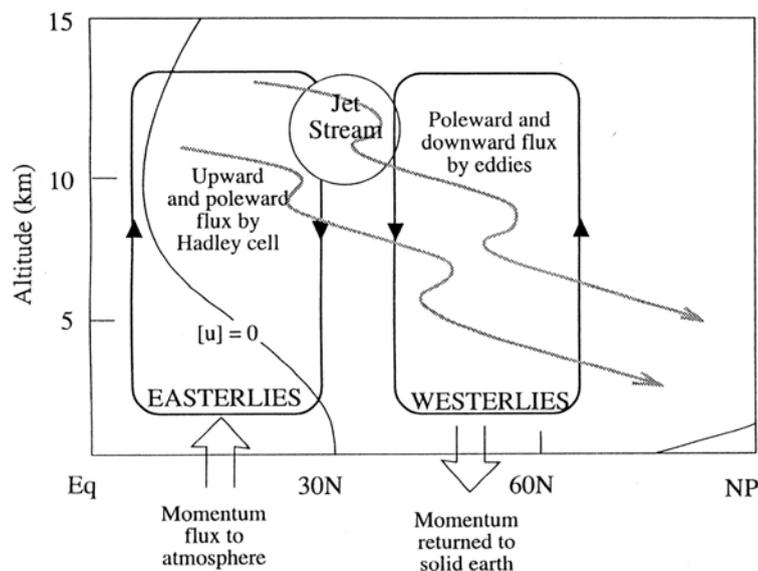
wobei Ω und R die Winkelgeschwindigkeit und der Radius der Erde sind. Falls keine Kräfte auf das Luftpaket wirken, ist der Drehimpuls L erhalten. Startet nun eine Luftmasse mit $u = 0$ am Äquator und kommt auf die Breite φ unter Erhaltung des Drehimpuls, so erhält sie die zonale Geschwindigkeit

$$u(\varphi) = \frac{\Omega \cdot R \cdot \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \quad , \quad (7.2)$$

das heisst, bei 30°N herrscht ein Westwind mit einer Geschwindigkeit von $u = 134 \text{ms}^{-1}$! Das ist um einen Faktor 3 grösser als der beobachtete zonale Jet Stream, dessen Maximum bei etwa 35°N in 12 km Höhe liegt (Fig. 7.2). Die einfache Betrachtung zeigt, dass Drehimpulstransport bei weitem genügen würde, um hohe zonale Geschwindigkeiten in mittleren Breiten zu erzeugen. Die Abschätzung weist aber darauf hin, dass der Strömung dauernd Drehimpuls entzogen werden muss. Dies geschieht in Form von Eddies, und dem damit verbundenen Drehimpulstransport. Der mittlere advektive Transport von Drehimpuls ist gegeben durch

$$\overline{[v \cdot L]} = \underbrace{[\overline{v}] \cdot (\Omega \cdot R \cdot \cos \varphi + [\overline{u}]) \cdot R \cdot \cos \varphi}_M + \underbrace{([\overline{u}^* \cdot \overline{v}^*])}_{SE} + \underbrace{[\overline{u' \cdot v'}]}_{TE} \cdot R \cdot \cos \varphi \quad , \quad (7.3)$$

in Analogie zu (4.7). Der meridionale Transport von Drehimpuls kommt durch die mittlere Strömung (M), sowie die stationären (SE) und transienten Eddies (TE) zustande. Beobachtungen zeigen, dass TE zwischen 20 und 50° geographischer Breite weitaus den wichtigsten Beitrag zum Drehimpulstransport liefern.



Figur 7.3: Schematische Darstellung des meridionalen Flusses von Drehimpuls von der Erdoberfläche via die Atmosphäre zurück an die Erde. (Figur aus Hartmann 1992).

Ein Luftpaket, das von einer bestimmten geographischen Breite Richtung Äquator strömt, wird durch die Erhaltung des Drehimpuls nach Westen abgelenkt. Dies führt zu den bekannten Passatwinden (*trade winds*). Da somit $u < 0$ resultiert, wird durch Reibung an der Erdoberfläche die Strömung beschleunigt, d. h. es gibt einen Impulsfluss von der Erde in die Atmosphäre. Dieser Impuls wird dann durch die Prozesse in (7.3) polwärts transportiert, um schliesslich in Zonen von $u > 0$ (Westwinde) durch Reibung wieder an die Erdoberfläche abgegeben zu werden. Dies ist in Fig 7.3 schematisch dargestellt.

Die Frage ist nun, welche die Ursachen sind für die *meridionale* Zirkulation, die im Argument mit dem Drehimpuls stillschweigend angenommen wurde und zu (7.2) führte. Bereits im 18. Jahrhundert wurde von *George Hadley* vorgeschlagen, dass die starke Sonneneinstrahlung in den Tropen Luft erwärmt und aufsteigen lässt. Somit muss an der Erdoberfläche Luft von der Umgebung nachfließen. Dabei stellt sich eine äquatorwärts gerichtete, meridionale Strömung nahe der Erdoberfläche ein. Die am Äquator aufsteigende Luft fließt dann in der Höhe wieder polwärts ab. Die sich so einstellende meridional geschlossene Zirkulation wird *Hadley Zirkulation*, oder *Hadley Zelle* genannt. Durch die Einwirkung der Coriolis Kraft, oder äquivalent dazu, die Erhaltung des Drehimpuls, stellt sich in der Nordhemisphäre somit an der Oberfläche eine süd-westwärts, in der Höhe jedoch eine nord-ostwärts gerichtete Strömung ein. Hadley dachte, dass sich die Zirkulationszelle bis zu den Polen erstreckt. Jedoch zeigten die Beobachtung schnell, dass die Hadley Zelle nicht einmal die mittleren Breiten erreicht, denn die Winde sind dort sowohl nahe der Oberfläche, wie auch in der Höhe, nach Osten gerichtet (Westwindgürtel). Die einfache Vorstellung einer rein thermisch getriebenen Strömung genügt also nicht, um die Beobachtungen ausserhalb der Tropen zu erklären.

Dazu muss man die Bilanzgleichungen für den Impuls, die Masse und die Energie in der Atmosphäre lösen. Die horizontalen Komponenten der Gleichungen sind im wesentlichen analog zu den Gleichungen (6.12). In der Atmosphäre müssen jedoch die vertikale Abhängigkeit der Dichte, und die vertikalen Bewegungen berücksichtigt werden. Für die Herleitung der Gleichungen verweisen wir auf die entsprechenden Kapitel in Holton (1992).

Wir betrachten nun die zonale und zeitliche Mittelung der Gleichungen; es werden also Terme der Form (4.6) auftreten. Die Strömung kann in einer meridionalen Ebene durch eine meridionale Stromfunktion $\chi(y, z)$ beschrieben werden, die wie folgt definiert ist:

$$\rho_0 \cdot \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial z}, \quad \rho_0 \cdot \bar{w} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y}, \quad (7.4)$$

wobei v und w meridionale und vertikale Geschwindigkeiten sind, und $\rho_0(z)$ die Dichte von Luft ist. Wie in Holton (1992) hergeleitet wird, genügt die Stromfunktion folgender partieller Differentialgleichung

$$\frac{N^2}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial y^2} + f_0^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial z} \right) = \underbrace{\frac{\kappa}{H} \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial y}}_D - \underbrace{\frac{R^*}{H} \cdot \frac{\partial^2 (\overline{v' \cdot T'})}}_{TEW} - \underbrace{f_0 \cdot \frac{\partial^2 (\overline{u' \cdot v'})}}_{TEI} + \underbrace{f_0 \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}}_R. \quad (7.5)$$

Dabei ist N die *Brunt-Viässälä Frequenz*, die Kreisfrequenz freier vertikale Schwingungen in einer stabilen Atmosphäre, und durch

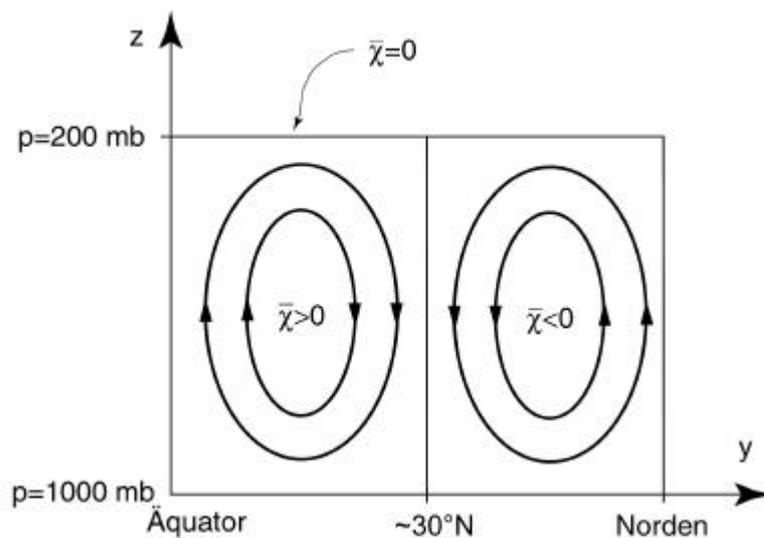
$$N^2 = \frac{R^*}{H} \cdot \left(\frac{\kappa \cdot T_0}{H} + \frac{dT_0}{dz} \right) \quad (7.6)$$

gegeben, wobei R^* die ideale Gaskonstante ist, $\kappa = R^* / c_p$, H ist die Höhe der Atmosphäre, $\bar{J}(y, z)$ in (7.5) ist eine mittlere diabatische Heizrate (durch Wärmeflüsse am Boden, oder latente Wärme aus Kondensationsprozessen), und \bar{X} ist eine mittlere Schubspannung in zonaler Richtung aufgrund von Reibung am Boden. Gemäss (7.5) wird die Stromfunktion durch vier Prozesse angetrieben: 1. diabatische Wärmequellen (D), 2. Wärmeflüsse durch transiente Eddies (TEW), 3. Impulsflüsse durch transiente Eddies (TEI), und 4. Reibung (R).

Die verallgemeinerte Poissongleichung (7.5) muss durch Randbedingungen ergänzt werden. Dabei betrachten wir ein Gebiet, das sich vom Äquator bis zum Pol erstreckt, und vertikal vom Boden zur Tropopause geht. Da der Transport diese Ränder nicht durchqueren kann, gilt $\bar{\chi} = 0$ auf dem Rand. Das Gebiet ist in Fig. 7.4 dargestellt.

Zur qualitativen Diskussion von (7.5) kann man annehmen, dass $\bar{\chi}$ durch geeignete Sinus-Funktionen in y und z dargestellt wird. Somit ist die linke Seite von (7.5) proportional zu $-\bar{\chi}$, und man kann folgende Beziehung anschreiben:

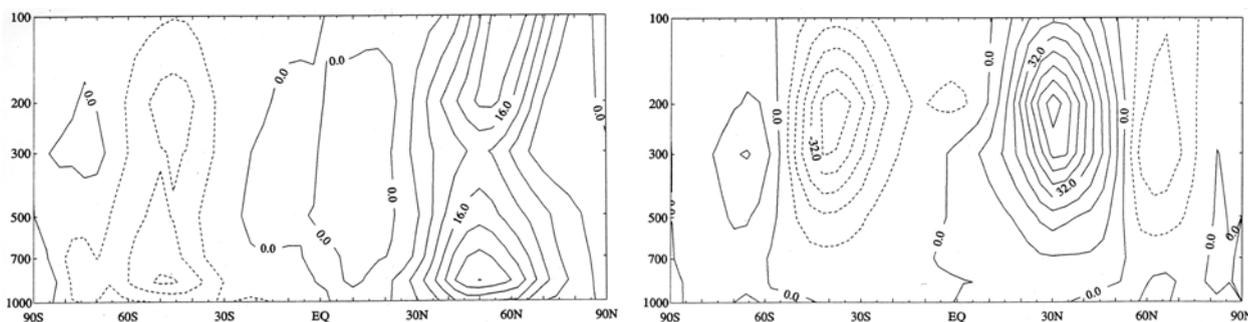
$$\bar{\chi} \propto -\frac{\partial}{\partial y} (\text{diabatische Wärmequellen}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\text{meridionaler Eddy-Wärmefluss}) \\ + \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} (\text{meridionaler Eddy-Impulsfluss}) - \frac{\partial}{\partial z} (\text{zonale Schubspannung}). \quad (7.7)$$



Figur 7.4: Schematische Darstellung der Stromfunktion $\bar{\chi}$ in der Nordhemisphäre. $\bar{\chi} > 0$ ist die thermisch direkte Hadley Zelle, $\bar{\chi} < 0$ beschreibt die thermisch indirekte Ferrel Zelle.

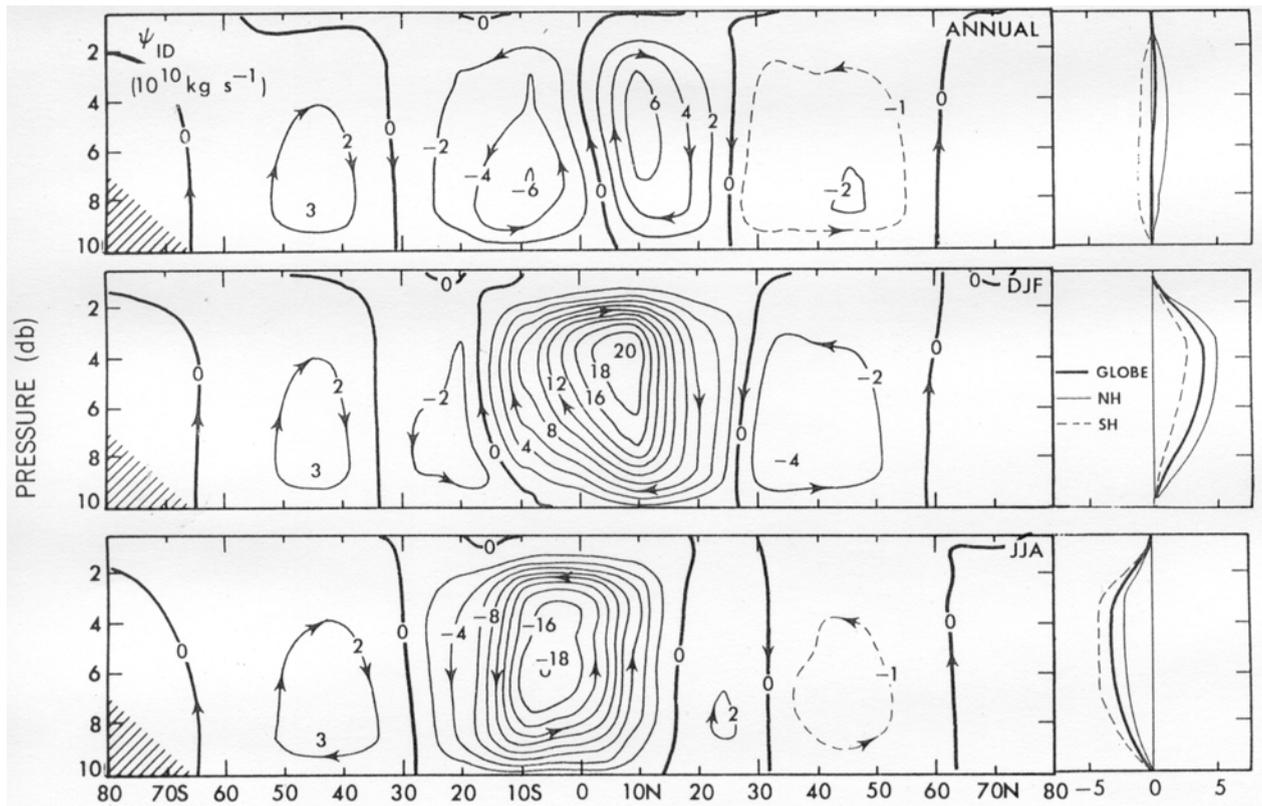
Nahe am Äquator wird durch Niederschlag sehr viel latente Wärme freigesetzt, und somit ist dort $\bar{J} > 0$, während auf etwa 30°N Abkühlung durch Strahlungsverlust dominiert, also $\bar{J} < 0$. In den niederen Breiten sind die Eddy-Flüsse TEW und TEI klein; der Beitrag der zonalen Schubspannung, die wegen der Passate nach Osten gerichtet ist, ist nur am unteren Rand wesentlich. Sowohl D als auch R in (7.7) tragen zu $\bar{\chi} > 0$ bei, und eine Hadley Zelle bildet sich aus. Es handelt sich hier um eine *thermisch direkte* Zelle, d.h. warme Luft steigt, kältere Luft sinkt (Fig. 7.4).

Die Eddy-Aktivität ist maximal von etwa 30° bis 60°N , wo sich die Sturmbahnen befinden. Die Breiten- und Höhenabhängigkeit der meridionalen Eddyflüsse sind in Figur 7.5 gezeigt. Daraus geht hervor, dass in diesen Breiten die beiden zugehörigen Terme in (7.7) negativ sind. Wegen den Westwinden ist die Schubspannung nach Westen gerichtet und nimmt gegen oben betragsmäßig ab, also $-R < 0$. Somit ist nach (7.7) $\bar{\chi} < 0$, und eine indirekte Zelle resultiert. Diese indirekte Zelle im Breitenbereich 40° bis 60°N heisst *Ferrel Zelle*. Die Ferrel Zelle ist thermisch indirekt, d.h. kalte Luft steigt und warme Luft sinkt.



Figur 7.5: Beobachtete Verteilung der Eddy-Flüsse von Wärme (links, in $^\circ\text{Cms}^{-1}$) und Impuls (rechts, in m^2s^{-2}) für Winter in der Nordhemisphäre. Positive Flüsse sind nordwärts. Die vertikale Achse bezeichnet den Druck in mb. (Figur aus Holton, 1992).

Die beobachtete meridionale Zirkulation (Fig. 7.6) zeigt die theoretisch erwarteten Zirkulationsrichtungen recht gut, mit einer starken Hadley Zelle in der jeweiligen Winterhemisphäre. Auch die Ferrell Zellen in der Süd- und Nordhemisphäre sind gut erkennbar.

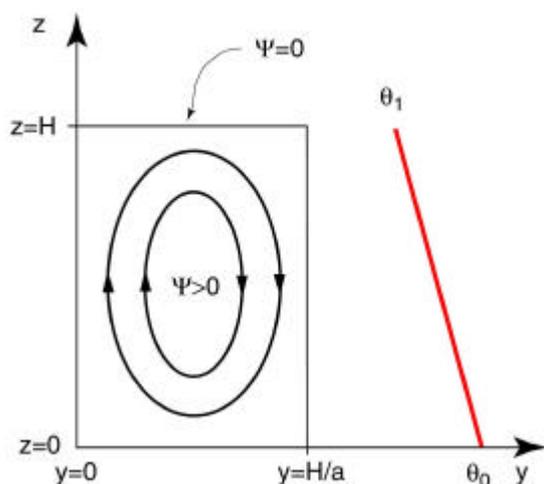


Figur 7.6: Beobachtete meridionale Zirkulation (Stromfunktion in $10^{10} \text{ kg s}^{-1}$), jährlich gemittelt (oben), und für den Nordwinter (Mitte), und den Nordsommer (unten). (Figur aus Peixoto & Oort, 1982).

7.2 Das Lorenz-Saltzman Modell

Zur Untersuchung thermisch getriebener Strömungen hat Barry Saltzman aus den Grundgleichungen einer viskosen, stabil geschichteten Strömung eine Näherung hergeleitet, die aus einem nichtlinearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen bestand. Die fundamentale Bedeutung dieses Gleichungssystems wurde von Edward Lorenz erkannt, der das System numerisch gelöst und interpretiert hat (Lorenz, 1963, *J. Atmospheric Sciences* 20, 130-141). Über die spezielle Anwendung auf viskose, inkompressible Strömungen hinaus kann das System als die einfachste Form der Beschreibung von nicht-linearen Prozessen im Zusammenhang mit der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre aufgefasst werden. Das Modell ist von besonderer Bedeutung, weil es das erste System war, an dem *deterministisches Chaos* beobachtet, und an welchem die Chaostheorie dann entwickelt wurde.

Deterministisches Chaos kann in einem nicht-linearen (Nichtlinearität ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung) System auftreten und besteht darin, dass die momentane zeitliche Veränderung funktional gegeben ist, jedoch die zeitliche Entwicklung des Systems über lange Zeiten nicht vorausgesagt werden kann. Mathematisch bedeutet das, dass das System durch mehrere gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit gegeben ist – also die Veränderung jederzeit exakt berechnet werden kann: das System ist deterministisch. Dieses System wird allgemein als Lorenz Modell bezeichnet. Da die ursprünglichen Gleichungen aber von B. Saltzman hergeleitet wurden, nennen wir dieses Gleichungssystem hier *Lorenz-Saltzman Modell*.



Figur 7.7: Koordinaten und Lösungsbereich für das Lorenz-Saltzman Modell. Es wird ein konstanter vertikaler Temperaturgradient angenommen.

Die folgende Herleitung des Lorenz-Saltzman Modells ist etwas technisch. Trotzdem sei sie hier beschrieben, da in der Literatur meistens einzig das dimensionslose System angegeben wird. Das Lorenz-Saltzman Modell wird auf einer meridionalen Ebene im nicht-rotierenden Bezugssystem (y, z) formuliert. Eine Verallgemeinerung für die f -Ebene wurde später durchgeführt (Lorenz, 1984, *Tellus 36A*, 98). Lösungen seien uniform in x -Richtung. Wir nehmen an, dass durch diabatische Effekte, d.h. Wärmequellen, eine Strömung im Uhrzeigersinn angetrieben werde. Zudem soll ein mittlerer vertikaler Temperaturgradient vorhanden sein, der die stabile Schichtung garantiert. Der Lösungsbereich ist schematisch in Fig. 7.7 dargestellt.

Das Fluid sei inkompressibel (eigentlich eine unzulässige Näherung für die Atmosphäre, jedoch zutreffend für ein Wasserkörper), womit die Massenerhaltung durch

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.8)$$

gegeben ist, und eine Stromfunktion definiert wird gemäss:

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (7.9)$$

Die Vorticity $\zeta = \partial w / \partial y - \partial v / \partial z$ ist dann gegeben durch

$$\zeta = \nabla^2 \Psi. \quad (7.10)$$

Bei der Formulierung der Erhaltungsgleichung der Vorticity zeigt es sich, dass Vorticity durch Eddy-Diffusion zerstört wird, und durch meridionale Temperaturgradienten $\partial \theta / \partial y$ (Auftrieb) produziert wird. Zur Herleitung der Vorticitygleichung starten wir von den Impulsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + v \cdot \nabla^2 v, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + v \cdot \nabla^2 w - \frac{g}{\rho_0} \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

wobei ν eine Eddy-Viskosität ist, und der letzte Term in (7.11b) die Beschleunigung durch Auftrieb beschreibt, der durch eine kleine Abweichung $\tilde{\rho}$ von der konstanten Dichte ρ_0 verursacht wird. Kreuzdifferenzieren von (7.11), und verwenden von (7.8) ergibt

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \cdot \nabla^2 \zeta - \frac{g}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} . \quad (7.12)$$

Mit Hilfe des Volumenausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = - \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \theta} , \quad (7.13)$$

kann (7.12) umgeformt werden zu

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \cdot \nabla^2 \zeta + g \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} . \quad (7.14)$$

Wir machen nun folgende Annahme betreffend der Temperaturverteilung:

$$\theta(y, z, t) = \theta_0 - \frac{\Delta T}{H} \cdot z + \tilde{\theta}(y, z, t) , \quad (7.15)$$

wobei $\tilde{\theta}$ eine Abweichung von einem stabilen Temperaturprofil $\theta_0 - \frac{\Delta T}{H} \cdot z$ mit $\Delta T = \theta_0 - \theta_1$ ist. Die Erhaltung der thermischen Energie lautet

$$\frac{D\theta}{Dt} = \kappa \cdot \nabla^2 \theta , \quad (7.16)$$

bzw. mit Hilfe von (7.15)

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \nu \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} - w \cdot \frac{\Delta T}{H} + w \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \kappa \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^2} . \quad (7.17)$$

Dabei ist κ eine Eddy-Diffusivität. Einsetzen von (7.9) und (7.10) in (7.14) ergibt das System

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \nabla^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \nabla^2 \Psi = \nu \cdot \nabla^4 \Psi + g \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} , \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} = \kappa \cdot \nabla^2 \tilde{\theta} + \frac{\Delta T}{H} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} . \quad (7.19)$$

(7.18-7.19) ist ein gekoppeltes, nicht-lineares System partieller Differentialgleichungen, die nun noch durch Randbedingungen ergänzt werden muss. Wir fordern, dass kein Transport durch den Rand stattfindet und dass keine Wärme durch die meridionalen Ränder fließt. Weiter sollen fixe Temperaturen am Boden und an der Obergrenze vorliegen, also

$$\begin{aligned}
\Psi &= 0 && \text{auf dem Rand,} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 && \text{für } y = 0 \text{ und } y = H/a, \\
\theta(z = 0) &= \theta_0, \text{ und } \theta(z = H) = \theta_1.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Die Lösung dieses Systems soll nun näherungsweise erfolgen, wobei nur die größten räumlichen Strukturen im Lösungsbereich betrachtet werden sollen. Dazu setzen wir eine abgebrochene *Fourierentwicklung* an, die bereits die Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned}
\Psi(y, z, t) &= X(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot a \cdot y}{H}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{H}\right), \\
\tilde{\theta}(y, z, t) &= Y(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot a \cdot y}{H}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{H}\right) - Z(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot z}{H}\right).
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Die örtliche Abhängigkeit ist vorgeschrieben, die zeitliche wird durch Koeffizientenfunktionen $X(t)$, $Y(t)$, und $Z(t)$ beschrieben. Diese *a priori* Wahl erlaubt Lösungen mit der einfachst möglichen räumlichen Struktur, und wegen dem Abbruch der Entwicklung können (7.21) nur Näherungslösungen darstellen. Nun werden die einzelnen Terme in (7.18) und (7.19) ausgewertet. Unter Vernachlässigung der Terme proportional zu X^2 entsteht aus (7.18) folgende Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \cdot (1 + a^2) \cdot \frac{dX}{dt} = -v \cdot \left(\frac{\pi}{H}\right)^4 \cdot (1 + a^2)^2 \cdot X + g \cdot \alpha \cdot \frac{\pi \cdot a}{H} \cdot Y. \tag{7.22}$$

Indem (7.21) in (7.19) eingesetzt wird, erhält man

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi \cdot a \cdot y}{H}\right) \cdot \left\{ \frac{dY}{dt} - \frac{\pi \cdot a}{H} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{H} \cdot X \cdot Z \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot z}{H}\right) + \kappa \cdot \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \cdot (1 + a^2) \cdot Y - \frac{\Delta T}{H} \cdot \frac{\pi \cdot a}{H} \cdot X \right\} \\
= \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot z}{H}\right) \cdot \left\{ \frac{dZ}{dt} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot a}{H} \cdot \frac{\pi}{H} \cdot X \cdot Y + \kappa \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{H}\right)^2 \cdot Z \right\}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Da \sin und \cos unabhängige Fourierkoeffizienten sind, müssen die beiden $\{\}$ -Klammern je 0 sein. Schliesslich nimmt man noch an, dass die Dynamik durch Prozesse im Innern des vertikalen Bereichs $\frac{1}{4}H < z < \frac{3}{4}H$, bestimmt ist, und somit die grobe Näherung $\cos \frac{2\pi z}{H} \approx -1$ gemacht werden kann.

Somit lautet das gewöhnliche Differentialgleichungssystem für die Koeffizientenfunktionen $X(t)$, $Y(t)$, und $Z(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= -c \cdot X + d \cdot Y \\
\frac{dY}{dt} &= -e \cdot X \cdot Z + f \cdot X - g \cdot Y \\
\frac{dZ}{dt} &= h \cdot X \cdot Y - k \cdot Z
\end{aligned} \tag{7.24}$$

mit den sieben Konstanten

$$\begin{aligned}
 c &= v \cdot \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \cdot (1 + a^2) & d &= \frac{g \cdot \alpha \cdot a \cdot H}{\pi \cdot (1 + a^2)} & e &= \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot a}{H^2} & f &= \frac{\Delta T \cdot \pi \cdot a}{H^2} \\
 g &= \kappa \cdot \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 (1 + a^2) & h &= \frac{\pi^2 \cdot a}{2 \cdot H^2} & k &= 4 \cdot \kappa \cdot \left(\frac{\pi}{H}\right)^2
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

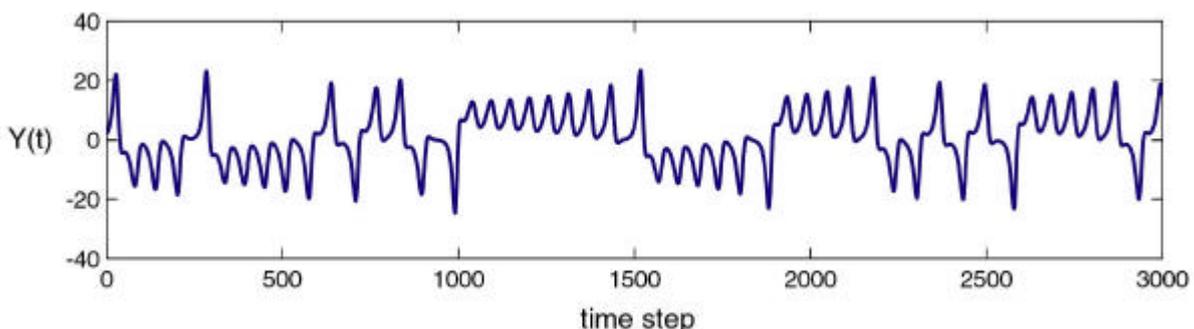
Durch Einführen der dimensionslosen Zeit $\tau = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \cdot (1 + a^2) \cdot \kappa \cdot t$, und geeignete Skalierung der Koeffizientenfunktionen X, Y, und Z kann das klassische Lorenz-Saltzman Modell hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= -\sigma \cdot X + \sigma \cdot Y \\
 \frac{dY}{dt} &= -X \cdot Z + r \cdot X - Y \\
 \frac{dZ}{dt} &= X \cdot Y - b \cdot Z
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

mit

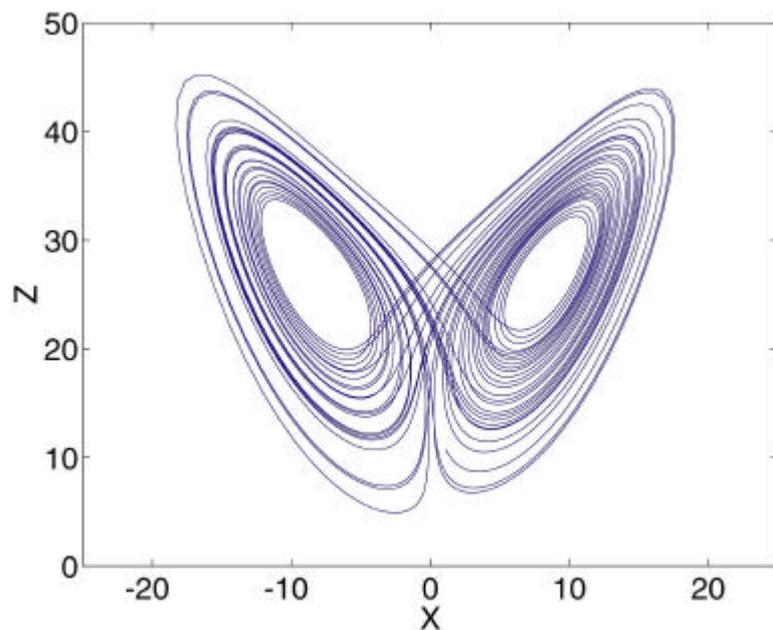
$$\sigma = v / \kappa \quad r = \frac{g \cdot \alpha \cdot H^3 \cdot \Delta T}{v \cdot \kappa} \cdot \frac{a^2}{\pi^4 \cdot (1 + a^2)^3} \quad b = \frac{4}{1 + a^2} \quad . \tag{7.27}$$

In Fig. 7.8 und 7.9 ist die Lösung von (7.26) für ein bestimmtes Set von Parametern abgebildet. Die Zeitreihen zeigen chaotisches Verhalten, in dem die Variablen, hier Y(t), vom einen Regime ($y > 0$) zum andern ($y < 0$) wechseln (Fig. 7.7). Ob chaotisches, periodisches, oder stationäres Verhalten vorliegt, hängt von der Wahl dieser Parameterwerte (7.27) ab. Die Aufenthaltsdauer in einem bestimmten Regime ist unregelmässig und deutlich länger als der Regimeübergang selbst. Somit enthält das System zwei unterschiedliche typische Zeitskalen: diejenige des Übergangs, und diejenige der Aufenthaltsdauer in einem Regime. Das Lorenz-Saltzman Modell ist ein Paradebeispiel für abrupte Übergänge in einem dynamischen System. Diese Übergänge erfolgen nicht durch äussere Störungen, sondern werden durch die Dynamik des Systems *spontan* ausgelöst.

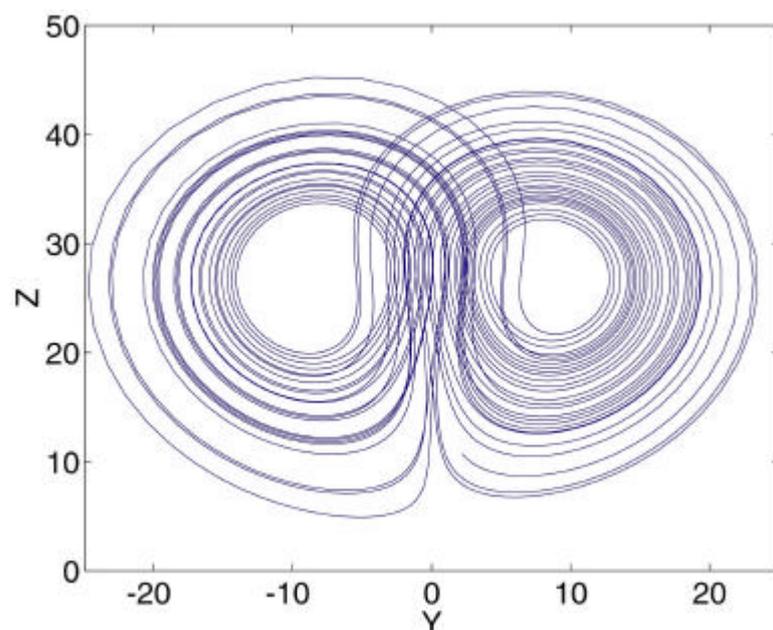


Figur 7.8: Erste 3000 Zeitschritte der Zeitreihe Y(t) des Lorenz-Saltzman Modells mit den klassischen Parameterwerten $r = 28$, $s = 10$, $b = 8/3$ und $\tau = 0.012$, integriert mit dem Runge-Kutta Verfahren.

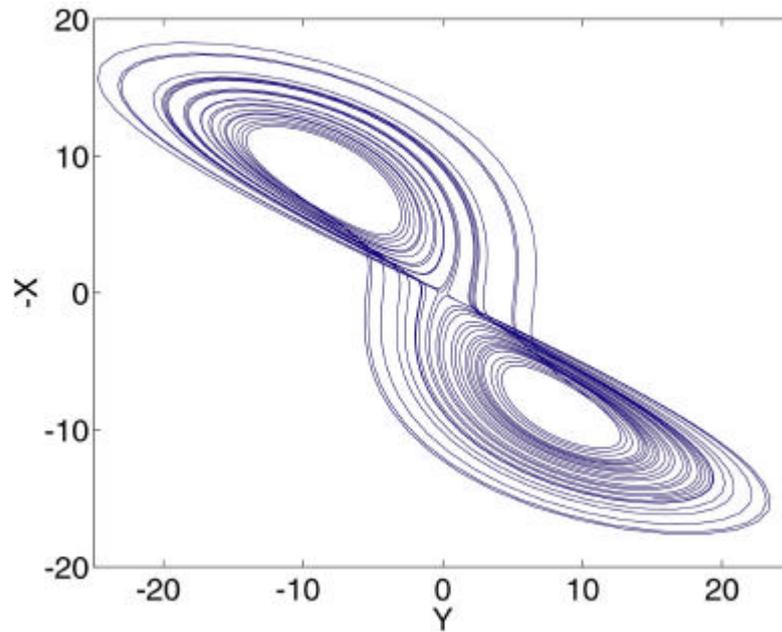
Figur 7.9 zeigt die Trajektorien des Lorenzmodells in verschiedenen Schnitten durch den 3-dimensionalen Variablenraum (X, Y, Z) . Die Punkte $(X = \pm 8.49, Y = \pm 8.49, Z = 27)$ stellen instabile Gleichgewichte dar. Trajektorien, die in deren Umgebung beginnen, bewegen sich spiralförmig heraus. Falls chaotisches Verhalten vorliegt, wie dies in Fig. 7.8 der Fall ist, so kreuzen sich die Trajektorien im (X, Y, Z) -Raum nie. Ein weiterer spezieller Ort ist der Ursprung $(0, 0, 0)$, ebenfalls eine stationäre Lösung der Gleichungen (7.26). Er steht im Zentrum des "Umschlagpunktes" von einem Regime zum anderen, und ist somit die Ursache für die grundsätzliche Nichtvorhersagbarkeit des Lorenz-Saltzman Systems.



Figur 7.9a: Schnitte durch die verschiedenen Ebenen im (X, Y, Z) -Raum. (X, Z) Ebene des Lorenz-Saltzman Modells mit den klassischen Parameterwerten.

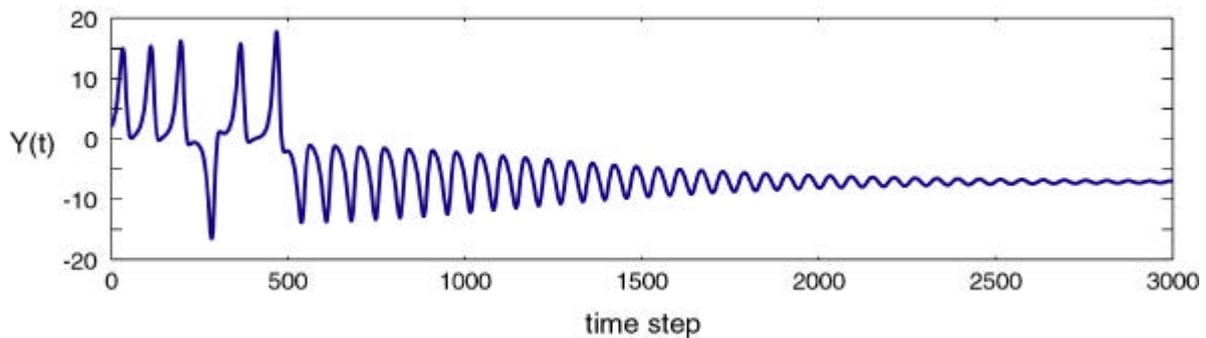


Figur 7.9b: Schnitte durch die verschiedenen Ebenen im (X, Y, Z) -Raum. (Y, Z) Ebene des Lorenz-Saltzman Modells mit den klassischen Parameterwerten.

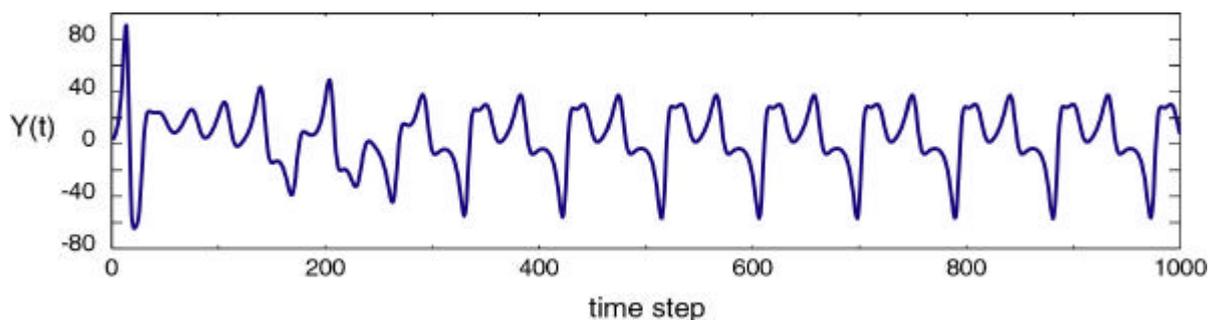


Figur 7.9c: Schnitte durch die verschiedenen Ebenen im (X,Y,Z) -Raum. $(Y,-X)$ Ebene des Lorenz-Saltzman Modells mit den klassischen Parameterwerten.

Das chaotische Verhalten des Lorenz-Saltzman Modells tritt nur in bestimmten "Fenstern" von Parameterwerten auf. In anderen Bereichen wird entweder ein stabiles Gleichgewicht gefunden, das nach einer relativ langen transienten Phase erreicht wird (Fig. 7.10), oder es tritt periodisches Verhalten auf, sogenannte *self-sustained oscillations*, die in Figur 7.11 abgebildet sind.



Figur 7.10: Wie Figur 7.8 aber mit $r = 20$, $s = 10$, $b = 8/3$.



Figur 7.11: Wie Figur 7.8 aber mit $r = 100$, $s = 10$, $b = 8/3$.

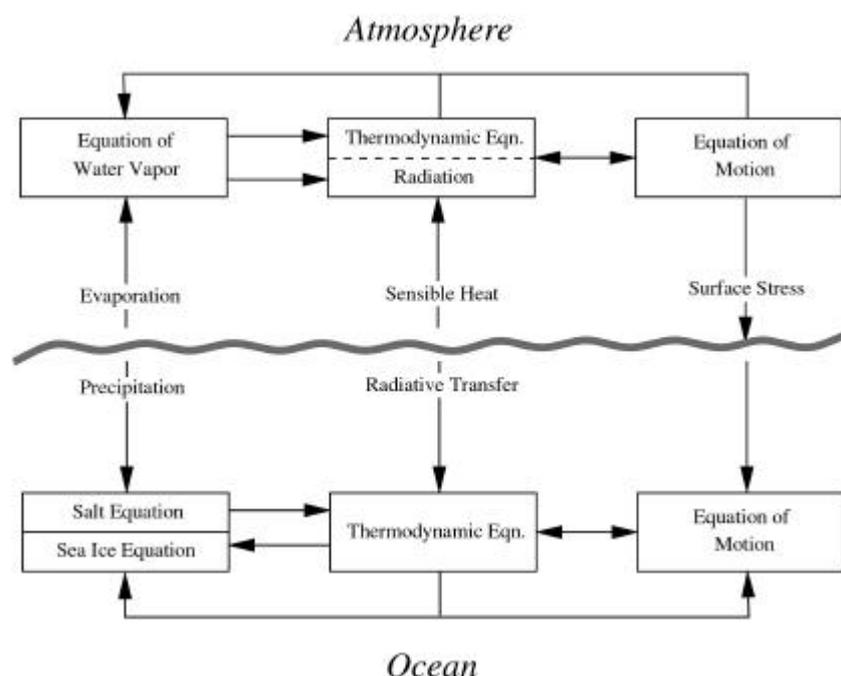
8 Atmosphäre-Ozean Wechselwirkung

8.1 Kopplung von physikalischen Modellkomponenten

Zwischen den beiden Komponenten des Klimasystems Ozean und Atmosphäre werden Energie, Impuls und Materie (Wasser, Kohlenstoff, Stickstoff, ...) ausgetauscht. Die meisten Bewegungen im Ozean, insbesondere die gross-skaligen Strömungen, werden verursacht durch diese Austauschflüsse. Diese müssen deshalb in einem Klimamodell möglichst realistisch dargestellt werden. Im Rahmen dieser Vorlesung wollen wir nicht auf die mikroskaligen Flüsse, die auf Längenskalen von cm und weniger stattfinden, eingehen. Eine ausführliche Beschreibung ist in Kraus & Businger (1994, *Atmosphere-Ocean Interaction, 2nd Ed.*, Oxford) gegeben. Wir stellen hier nur diejenigen Parametrisierungen vor, die bei grob aufgelösten Klimamodellen hauptsächlich verwendet werden. Auch Formulierungen von sogenannten Randschichten in Atmosphäre und Ozean (*boundary layers*) werden wir nicht diskutieren.

Atmosphäre-Ozean Flüsse werden einerseits durch die Dynamik bestimmt, sind aber gleichzeitig Ursache für diese. Wie in Fig. 8.1 gezeigt, sind die Beziehungen nicht immer wechselseitig. So treibt zum Beispiel der Wind die Ozeanströmungen durch Impulsflüsse an, die Ozeanströmungen übertragen aber selbst nicht Impuls auf die atmosphärische Strömung. Man unterscheidet Wärme Flüsse (Flüsse von thermischer und latenter Energie), Wasserflüsse (Fluss von potentieller Energie) und Impulsflüsse. Für die einzelnen Modellkomponenten können diese Flüsse als Randbedingungen aufgefasst und formuliert werden.

So wie Atmosphäre und Ozean gekoppelt werden, müssen analoge Überlegungen bei der Kopplung von Modulen des Meereises und der Landoberfläche gemacht werden.



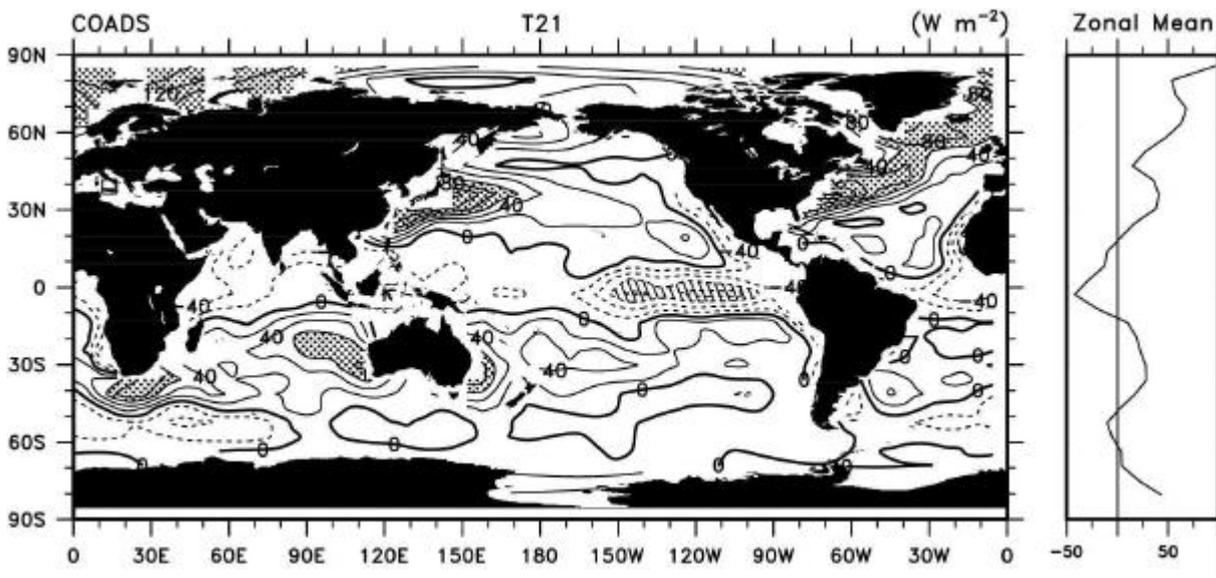
Figur 8.1: Schema der verschiedenen Modellbereiche, mit den Flüssen von Wasser, Wärme und Impuls. (nach Manabe & Bryan, 1969, *J. Atmos. Sci.* 26, 786)

8.2 Thermische Randbedingungen

Die vollständige thermische Randbedingung für den Wärmefluss vom Ozean in die Atmosphäre $F(O \rightarrow A)$ ist gegeben durch

$$F(O \rightarrow A) = -\underbrace{(1-\kappa) \cdot Q^{\text{short}}}_{K} + \underbrace{\varepsilon_O \cdot \sigma \cdot T_O^4}_{LA} - \underbrace{\varepsilon_A \cdot \sigma \cdot T_A^4}_{LR} + \underbrace{D \cdot (T_O - T_A)}_S + \underbrace{E(T_O, T_A)}_V, \quad (8.1)$$

wobei T_O und T_A Oberflächentemperaturen des Ozeans und der Atmosphäre sind. Der Wärmefluss besteht aus fünf Komponenten: die kurzwellige Einstrahlung (K), langwellige Ausstrahlung (LA), langwellige Rückstrahlung (LR), sensibler Wärmefluss (S) und Verdunstung (V). Positives Vorzeichen bedeutet Fluss vom Ozean in die Atmosphäre. Die globale Verteilung von Ozean-Atmosphäre Wärmeflüssen ist in Fig. 8.2, und der Atlantik als Ausschnitt in Fig. 8.3 dargestellt.



Figur 8.2: Jährlich gemittelte Wärmeflüsse basierend auf dem *Comprehensive Ocean Atmosphere Data Set* (COADS), und das zonale Mittel (rechts). Gebiete mit Beträgen von Wärmeflüssen über 60 W m^{-2} sind schraffiert. (Figur von Trenberth et al., 2001, *Climate Dynamics* 17, 259)

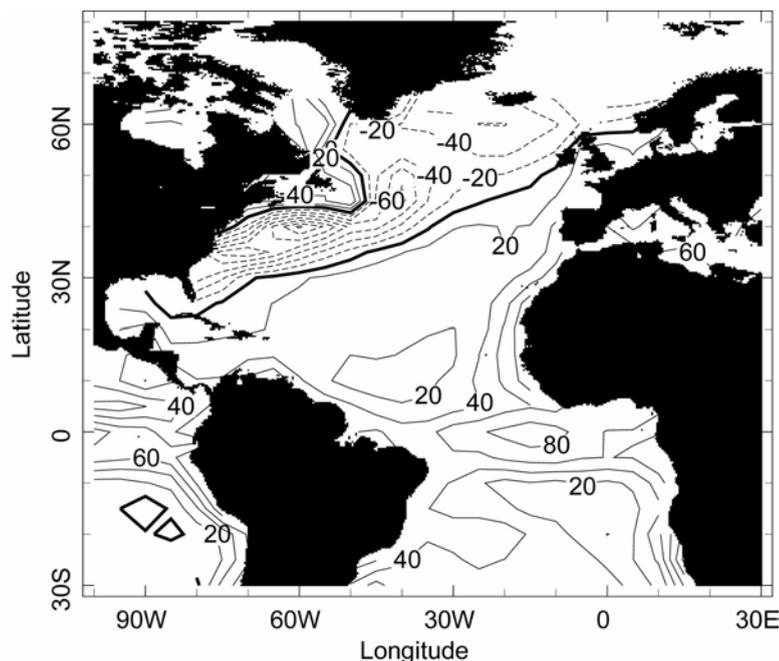
Typische Werte für die Parameter in (8.1) sind

$$\varepsilon_O = 0.96, \quad \varepsilon_A = 0.7 \dots 0.9, \quad \kappa = 0.28, \quad D = 10 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}, \quad (8.2)$$

und

$$E(T_O, T_A) = c_E \cdot \exp\left(14.7 - \frac{5418 \text{ K}}{T_A}\right) \cdot \left(0.2 + 5418 \text{ K} \cdot \frac{T_O - T_A}{T_A^2}\right), \quad (8.3)$$

wobei c_E ein Transferkoeffizient ist, der von der Windgeschwindigkeit abhängt. Der Transferkoeffizient D für den sensiblen Wärmefluss kann, je nach Parametrisierung, ebenfalls von der Windgeschwindigkeit abhängig gemacht werden. Die langwelligeren Wärmeflüsse werden



Figur 8.3: Wärmeflüsse $-F(O \rightarrow A)$ im Atlantikbereich in Wm^2 . Die Karte wurde auf dem Internet generiert (<http://ingrid.ldeo.columbia.edu>), wo viele Datensätze zugänglich sind (Cayan Datensatz).

der Einfachheit halber in (8.1) als Graukörperstrahlung mit zugehörigen Emissivitäten angegeben. Jedoch kann besonders die Rückstrahlung (LR) in einem komplexen Modell von den einzelnen Beiträgen des freien Himmels (im wesentlichen Rückstrahlung einer feuchten Atmosphäre) und der Wolkenrückstrahlung (hohe und niedrige Wolken) stammen, und somit in komplexer Weise von Modellwerten der Atmosphären- Komponente abhängen. Diese beeinflussen auch den Absorptionskoeffizienten κ , der in (8.1) vorgeschrieben ist, in Wirklichkeit aber ebenfalls vom Zustand der Atmosphäre beeinflusst wird. Prinzipiell hängt der Wärmefluss zwischen Ozean und Atmosphäre von der Temperatur in Ozean und Atmosphäre, sowie von der Windgeschwindigkeit ab, also alles Größen, die in einem gekoppelten Klimamodell simuliert werden.

In der Klimamodellierung werden oft auch vereinfachte Formen von (8.1) verwendet, besonders wenn eine einzelne Modellkomponente (z. B. der Ozean) allein integriert wird. Dies ist oft zu Beginn einer Simulation der Fall, wenn erst einmal ein stabiles Gleichgewichtsklima gefunden werden soll. Die vereinfachte Form von (8.1) erhält man durch linearisieren mit dem Ansatz $T_A = \bar{T}_A - T'_A$, und $T_O = \bar{T}_O - T'_O$, und somit aus (8.1)

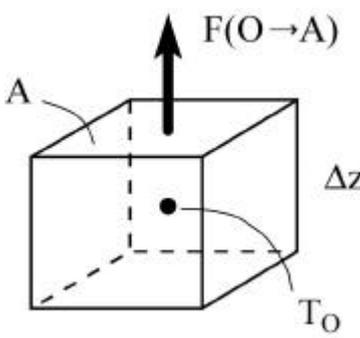
$$F(O \rightarrow A) = F_0 + D^* \cdot (T'_O - T'_A) , \quad (8.4)$$

wobei $D^* \approx 45 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ nun ein typischer Transferkoeffizient ist. Beachte, dass $D^* > D$, da (8.4) jetzt auch die Effekte der Temperaturabhängigkeit der Verdunstung und der netto langwelligeren Strahlung beinhaltet. Haney (1971, *J. Phys. Oceanography* 1, 241) schlug eine weitere Vereinfachung von (8.4) vor:

$$\begin{aligned} F(O \rightarrow A) &= D^* \cdot (T_O - T_O^*) , \text{ oder} \\ F(O \rightarrow A) &= D^* \cdot (T_A^* - T_A) \end{aligned} \quad (8.5)$$

mit den scheinbaren Temperaturen

$$T_O^* = T_A - \frac{F_0}{D^*}, \quad T_A^* = T_O + \frac{F_0}{D^*}, \quad (8.6)$$



Figur 8.4: 1-Box Modell zur Illustration von restoring fluxes.

wobei T_O^* und T_A^* konstant angenommen werden. Die Formulierungen (8.5) heißen *restoring heat fluxes*, oder *Newtonian heat fluxes*. Dies kommt daher, dass die Wärmeflüsse so gerichtet sind, dass sich die variable Oberflächentemperatur T der fixen Temperatur T^* asymptotisch annähert, falls keine weiteren Wärmeflüsse (z.B. advective Flüsse) vorhanden sind.

Die Wirkung von *restoring heat fluxes* und die Rolle von D^* sollen anhand eines Box-Modells kurz illustriert werden.

Die Energiebilanz im 1-Box Modell (Fig. 8.4) mit Volumen V und Oberfläche A ist gegeben durch

$$\rho \cdot V \cdot c \cdot \frac{dT_O}{dt} = -A \cdot F(O \rightarrow A) = -A \cdot D^* \cdot (T_O - T_O^*). \quad (8.7)$$

Die Gleichung (8.7) kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{dT_O}{dt} = -\frac{D^*}{\rho \cdot c \cdot \Delta z} \cdot (T_O - T_O^*) = \frac{1}{\tau} \cdot T_O^* - \frac{1}{\tau} \cdot T_O, \quad (8.8)$$

wobei nun τ eine typische Zeitskala der Relaxation ist. Die Lösung von (8.8) lautet

$$T_O(t) = T_O^* + (T_O(t=0) - T_O^*) \cdot e^{-t/\tau}. \quad (8.9)$$

Störungen klingen also mit der Zeitskala τ exponentiell ab. Eine Abschätzung dieser Zeitskala ergibt:

$$\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot \Delta z}{D^*} \approx \frac{1028 \cdot 3900 \text{ s}}{45 \frac{\text{m}}{\text{m}}} \cdot \Delta z \approx 1 \frac{\text{Tag}}{\text{m}} \cdot \Delta z. \quad (8.10)$$

In einem Ozeanmodell, das ungekoppelt in den Gleichgewichtszustand gebracht werden soll, verwendet man meistens *restoring heat fluxes*, wobei für T_O^* die beobachtete Oberflächentemperatur verwendet wird. Dies garantiert, dass die Oberflächenwerte der Temperatur nie stark von den Beobachtungen abweichen und dass ein definiertes Gleichgewicht der Strömung gefunden wird. In Atmosphärenmodellen kann man analog vorgehen, indem man (8.5b) benützt und nun T_A^* beispielsweise Werte einer Klimatologie sind.

Die Formulierungen (8.5) können als einfachste Formen von Atmosphären- und Ozeanmodellkomponenten aufgefasst werden, indem sie in spezifischer Parametrisierung die Wirkung der jeweilig nicht dynamisch modellierten Komponente simulieren.

Dies kann anhand von zwei Extremfällen von (8.4) gut demonstriert werden.

- Konstanter Fluss: Wir wählen $D^* = 0$, das heisst der konstante Wärmefluss ist unabhängig von einer allfälligen Abweichung der Temperaturen von den mittleren Werten \bar{T}_A und \bar{T}_O . Die Atmosphäre hat also eine verschwindende Wärmekapazität; man spricht auch von *zero heat capacity models*. Dieser Fall liegt auch vor, wenn sehr lange Relaxationszeiten gewählt werden.
- Konstante Temperatur: Dieser Fall liegt vor, wenn T_A oder T_O konstant sind, also wie "Wärmebäder" wirken. Damit haben Atmosphäre, oder Ozean eine unendlich grosse Wärmekapazität.

Ein wichtiges Problem ist, dass die Formulierung (8.5) eine mögliche Skalenabhängigkeit der Relaxationszeit ignoriert. Kleinräumige Temperaturanomalien an der Meeresoberfläche werden durchaus mit der "Geschwindigkeit" von $\approx 1 \text{ m/Tag}$ durch direkten Wärmeaustausch entfernt. Gross-skalige Anomalien können jedoch viel länger überleben, da sie auch viel tiefer in den Ozean eindringen, und so eine wesentlich grössere Wärmemenge zum Ausgleich benötigt wird. Diese Wärmemenge steht unter Umständen von der Atmosphäre her (in Form von schnell vorüberziehenden Stürmen) nicht zur Verfügung.

Um die Skalenabhängigkeit zu berücksichtigen, müsste man eigentlich schreiben:

$$F(\bar{x}) = \int \Lambda(\bar{x}, \bar{x}') \cdot \{T(\bar{x}') - T^*(\bar{x}')\} d\bar{x}' , \quad (8.11)$$

d.h. eine nicht-lokale Abhängigkeit des Flusses am Ort \bar{x} . Dabei ist natürlich die Bestimmung der Formfunktion $\Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ sehr schwierig. Ein Schritt Richtung Skalenabhängigkeit von τ bzw. D wurde von Willebrand (1993, NATO ASI I5) vorgeschlagen:

$$F(O \rightarrow A) = D_1 \cdot (T_O - T_O^*) - D_2 \cdot \nabla^2 (T_O - T_O^*) , \quad (8.12)$$

mit $D_1 \approx 2 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ und $D_2 \approx 10^{13} \text{ W K}^{-1}$. Kleinräumige Anomalien mit einer typischen Länge von 500 km werden, bei einer obersten Ozeanschicht von 50 m Dicke auf der Zeitskala

von $\tau_2 = \frac{\rho \cdot c \cdot \Delta z \cdot L^2}{D_2} \approx 60 \text{ Tage}$ ausgeglichen, während gross-skalige Anomalien auf der

Zeitskala von $\tau_1 = \frac{\rho \cdot c \cdot \Delta z}{D_1} \approx 3.5 \text{ Jahre}$ verschwinden. Formulierung (8.12) kann auch als eine

einfache Art Energiebilanzmodell der Atmosphäre aufgefasst werden.

8.3 Hydrologische Randbedingungen

Hier geht es um die Kopplung des Wasserkreislaufs, der für den Transport von Energie in Form von latenter Wärme in der Atmosphäre und für die Veränderung der Dichte des Wassers an der Ozeanoberfläche durch Regen und Verdunstung von zentraler Bedeutung ist. Bei letzterem Prozess bleibt Salz im Ozean zurück, d.h. Verdunstung führt zu einer Erhöhung der Salzkonzentration an der Ozeanoberfläche. Da die Dichte von Meerwasser an der Oberfläche näherungsweise durch

$$\rho(T,S) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0) + \beta \cdot (S - S_0) + \gamma \cdot (T - T_0)^2) , \quad (8.13)$$

gegeben ist, mit

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1028.1 \text{ kg m}^3 & \alpha &= -5.25 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} , \\ T_0 &= 0^\circ\text{C} & \beta &= 7.86 \cdot 10^{-4} , \\ S_0 &= 35 & \gamma &= -6.61 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2} , \end{aligned} \quad (8.14)$$

nimmt ρ mit zunehmender Salzkonzentration S (in Gramm Salz pro Kilogramm Wasser) zu.

In Analogie zu (8.5) werden Ozeanmodelle mit der Randbedingung

$$F_S(O \rightarrow A) = D_S^* \cdot (S - S^*) , \quad (8.15)$$

in das Gleichgewicht gebracht; der Transferkoeffizient D_S^* hat die Masseinheit $\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$. Dies garantiert, dass Oberflächenwerte von Salz nahe bei den gemessenen Daten S^* bleiben. (8.15) heisst *restoring salt flux*. Dabei wird die Zeitskala

$$\tau = \frac{\rho \cdot \Delta z}{D_S^*} \quad (8.16)$$

in den meisten Fällen identisch mit (8.10) gewählt. Wenn für beide Flüsse die Formulierungen (8.5) und (8.15) für Ozeanmodelle verwendet werden, spricht man allgemein von *restoring boundary conditions*.

In Atmosphärenmodellen muss ebenfalls eine Bedingung am unteren Rand gegeben werden. Diese lautet über Wasser meistens

$$F_W(O \rightarrow A) = D_W \cdot (q - q^*) , \quad (8.17)$$

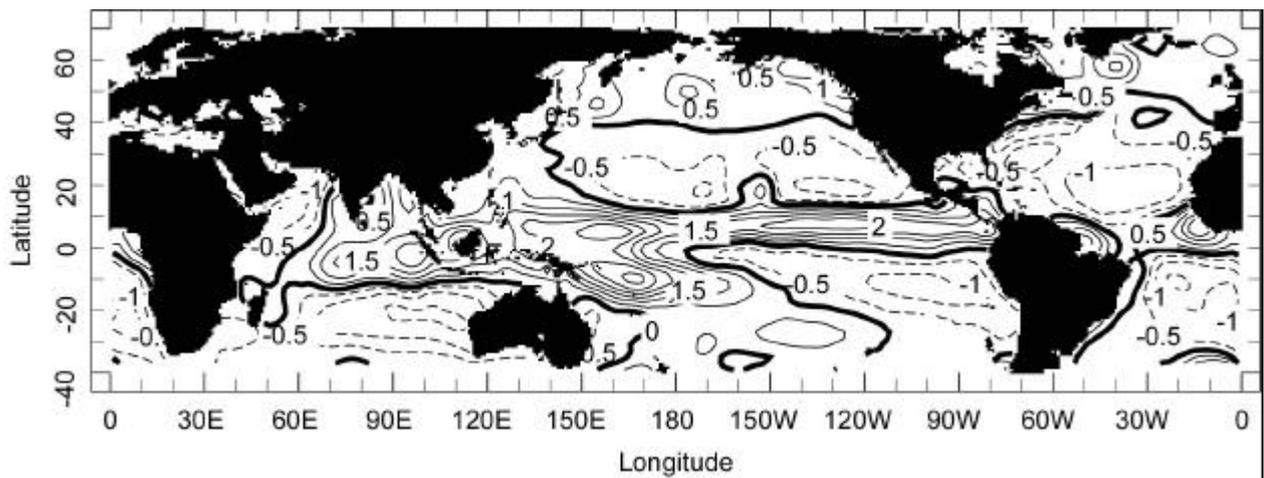
wobei q^* eine vorgeschriebene spezifische Feuchte ist. Über Land werden gewöhnlich einfache hydrologische Modelle (*bucket models*) angewendet. Bei der Kopplung von Atmosphären- und Ozeanmodellen müssen die Salzflüsse in (8.15) mit den Wasserflüssen in (8.17) konsistent sein. Dies geschieht näherungsweise, indem die Salzflüsse durch einen konstanten Umrechnungsfaktor $\rho \cdot S_0$, mit einer Referenzsalinität S_0 , dividiert werden:

$$p - e = \frac{1}{\rho \cdot S_0} \cdot F_S(O \rightarrow A) , \quad (8.18)$$

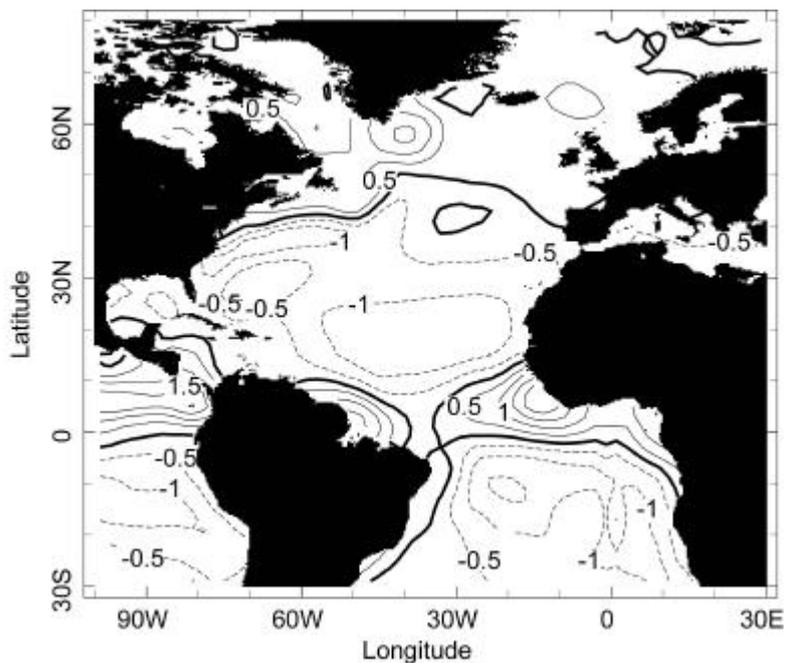
und $p - e$ ist die Netto-Wasserbilanz in m/s (oder mm/Jahr). Die Verteilung von $p - e$ ist in Fig. 8.5 und 8.6 dargestellt. Die Umrechnung in Energieflüsse erfolgt gemäß

$$E = \rho \cdot L \cdot e , \quad P = \rho \cdot L \cdot p , \quad (8.19)$$

mit $L = 2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$, der Verdunstungswärme von Wasser.



Figur 8.5: Verteilung der Wasserflüsse $p - e$ in m/Jahr, mit Contourintervall von 0.5 m/Jahr. Die Karte wurde auf dem Internet generiert (<http://ingrid.ldeo.columbia.edu>), wo viele Datensätze zugänglich sind (Oberhuber Datensatz).



Figur 8.6: Wasserflüsse $p - e$ im Atlantikbereich in m/Jahr. Die Karte wurde auf dem Internet generiert (<http://ingrid.ldeo.columbia.edu>), wo viele Datensätze zugänglich sind (Oberhuber Datensatz).

8.4 Impulsflüsse

Der Eintrag von Impuls in den Ozean, bzw. in die Atmosphäre, wird durch Schubspannungen τ_x und τ_y formuliert (siehe Gleichung 6.7). τ ist eine Funktion der Windgeschwindigkeit u sind. Aufgrund von Dimensionsbetrachtungen setzt man folgende Parametrisierung an:

$$\tau = c_D \cdot \rho \cdot u^2, \quad (8.20)$$

wo ρ die Dichte der Luft ist und c_D ein dimensionsloser Transferkoeffizient für Impuls ist. Beispielsweise wird für c_D oftmals folgender Ansatz gemacht:

$$c_D = \begin{cases} 1.1 \cdot 10^{-3} & 0 < |u| < 6 \text{ m s}^{-1} \\ 0.61 \cdot 10^{-3} + 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} \cdot |u| & 6 \text{ m s}^{-1} < |u| < 22 \text{ m s}^{-1} \end{cases}, \quad (8.21)$$

Zwischen Atmosphäre und Ozean werden vertikale Impulsflüsse jeweils als Kräfte, die auf die gesamte oberste Schicht des Ozeanmodells (bzw. unterste Schicht des Atmosphärenmodells) wirken, ausgedrückt.

8.5 Gemischte Randbedingungen

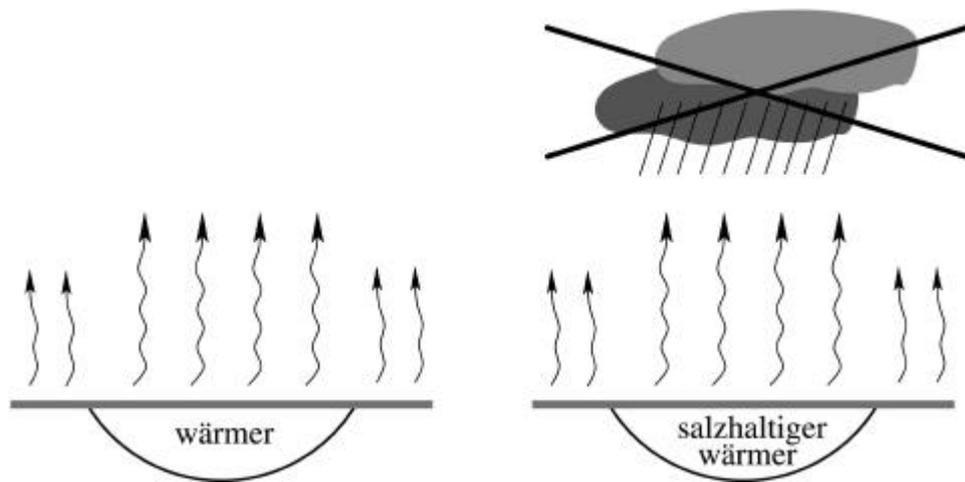
Restoring boundary conditions sind nützlich, um Gleichgewichtszustände von Ozeanmodellen zu finden, deren Oberflächentemperaturen und -salinitäten in guter Übereinstimmung mit Daten sind. Bei Wärmeflüssen kann noch einigermaßen plausibel begründet werden, warum Flüsse proportional zu Abweichungen der Temperaturen sein sollen. Dies ist eigentlich nichts anderes als eine diskretisierte Formulierung des Wärmeflusses nach dem Fick'schen Gesetz. Physikalisch bedeutet dies, dass beispielsweise eine warme Anomalie der Oberflächentemperatur im Ozean zu einem verstärkten Wärmefluss vom Ozean in die Atmosphäre führt, und somit eine Abkühlung verursacht.

Dieselbe Argumentation kann jedoch für Wasserflüsse nicht angewendet werden. Lokal erhöhter Salzgehalt an der Ozeanoberfläche, z.B. durch einen Ozean-Wirbel (Eddy) verursacht, bewirkt keinen verstärkten Niederschlag (Fig. 8.7). Solche Anomalien werden deshalb nicht auf einer typischen Zeitskala eliminiert und haben somit eine deutlich längere Lebensdauer. Es gibt also keine physikalische Begründung für (8.15).

Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, ersetzt man in Ozeanmodellen, die im Gleichgewicht angelangt sind (also nach ca. 3000 Jahren), die Gleichung (8.15) durch einen konstanten Fluss

$$F_S^*(O \rightarrow A) = D_S^* \cdot (S_\infty - S^*), \quad (8.22)$$

wobei S_∞ die Salinität ist, die beim Gleichgewichtszustand erreicht worden ist. Gemäss (8.22) ist F_S^* nicht mehr zeitabhängig. Die Kombination der beiden Randbedingungen (8.5a) und (8.22) wird als *gemischte Randbedingungen (mixed boundary conditions)* bezeichnet. Im Prinzip stellen sie eine erste Näherung an die unterschiedliche Natur der Rückkoppelungsprozesse bezüglich Wärme- und Wasserflüssen dar.

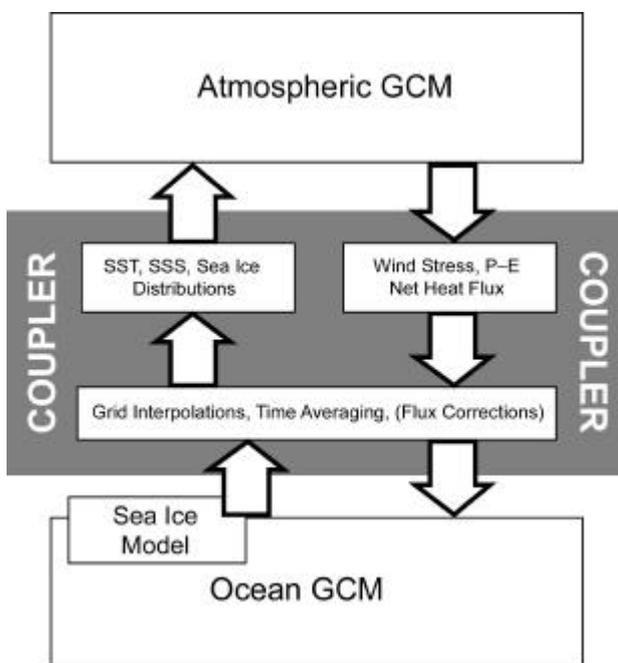


Figur 8.7: Schematische Illustration von Temperatur- und Salzgehaltanomalien an der Ozeanoberfläche und die unterschiedliche Reaktion der Wärme- und Wasserflüsse.

Bei gemischten Randbedingungen kann sich die Salinität, und somit die Dichte, an der Oberfläche des Ozeans beliebig von einer vorgegebenen Verteilung S^* entfernen, ohne dass Wasserflüsse reagieren und den entstehenden Veränderungen entgegenwirken. Das bedeutet, dass Salzanomalien dauerhaft die Struktur und Zirkulation verändern könnten. Dieses Konzept – das erste Mal von Stommel (1961) vorgeschlagen – wurde von Bryan (1986, *Nature* 323, 301) in einem 3-dimensionalen Ozeanmodell verwendet. Das überraschende Resultat war der Nachweis von mehreren Gleichgewichten (*multiple equilibria*), das heisst, unter denselben Randbedingungen hat man qualitativ verschiedene Ozeanzirkulationen simuliert. Dies wird im Kapitel 9 näher behandelt.

8.6 Gekoppelte Modelle

Die grösste Herausforderung der Klimamodellierung ist die Konstruktion von konsistenten gekoppelten Modellen, die die Klimakomponenten Ozean, Atmosphäre, Cryosphäre, Landoberfläche, Biosphäre, sowie auch die physikalisch-biogeochemischen Wechselwirkungen einschliessen und quantitativ modellieren. Im Laufe der Jahre wurden grosse Fortschritte in der Kopplung erreicht, wie dies bereits in Fig. 1.11 illustriert wurde. Eine besondere Schwierigkeit besteht darin, sowohl im Ozean wie auch in der Atmosphäre Klimatologien zu simulieren, die gut mit Beobachtungen übereinstimmen. Über viele Jahre traten besondere Probleme bei den Wärme- und Wasserflüssen auf, indem der Ozean und die Atmosphäre je unterschiedliche Flüsse benötigten, um in ein Gleichgewicht zu kommen. Das bedeutet, dass diese Modellkomponenten zum Zeitpunkt der Kopplung nicht mit denselben Flüssen betrieben werden können. Dies führt zwangsläufig zu einem Drift der beiden Modellkomponenten und zu allenfalls völlig unrealistischen Zuständen.



Figur 8.8: Ablaufschema der Kopplung von Atmosphären- und Ozeanmodellkomponenten.

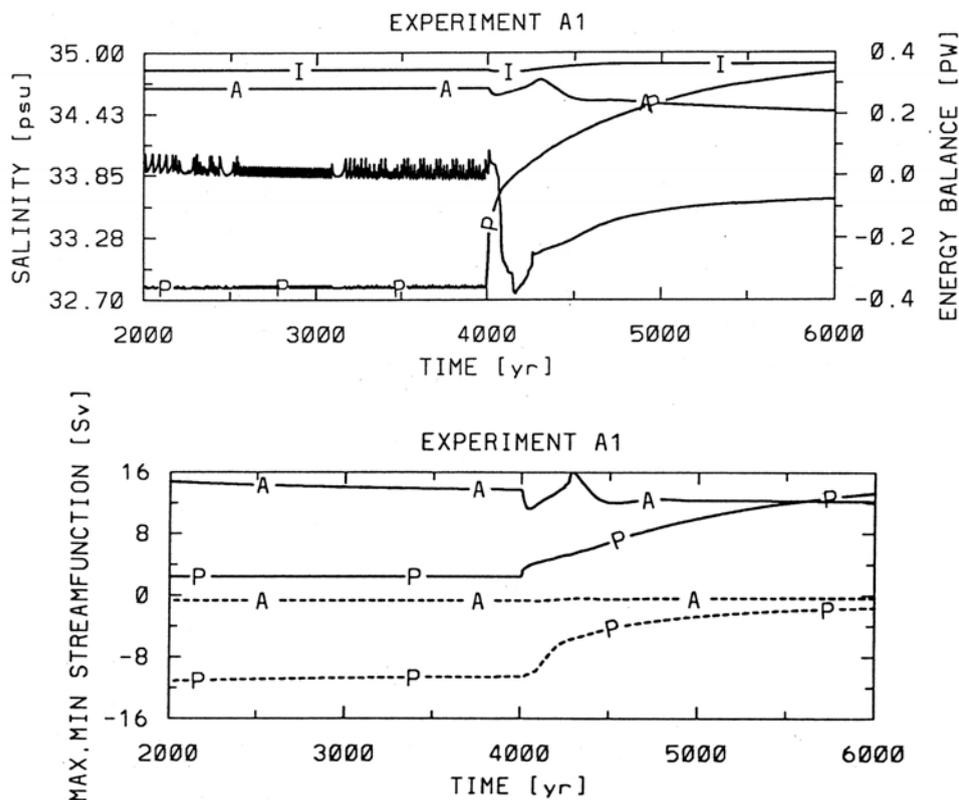
Idealerweise erfolgt die Kopplung gemäss dem Schema, das in Figur 8.8 gegeben ist. Bei Klimamodellen der älteren Generation führte dies regelmässig zu Klimadrift, d.h. ein der Klimatologie entsprechender stabiler Zustand konnte nicht erreicht werden. Dies ist vor allem dann dramatisch, wenn man in einem Bereich ist, wo es mehrere Gleichgewichte gibt.

Ein solcher Klimadrift ist in Fig. 8.9 abgebildet, wie er in einem vereinfachten gekoppelten Modell auftritt. Zunächst wird die Ozean Komponente für 4000 Jahre unter *restoring boundary conditions* in einen Gleichgewichtszustand gebracht, worauf ein einfaches Energiebilanzmodell dazugekoppelt wird. Es sind nun mehr Freiheitsgrade vorhanden, sodass sich die Oberflächenwerte von T und S ebenfalls verändern können.

Wie bereits mehrfach erwähnt, behilft man sich zur Verhinderung des Drifts einer unphysikalischen Krücke: sogenannte Flusskorrekturen werden angewandt. Obwohl die neueste Generation gekoppelter Modelle solche Flusskorrekturen nicht mehr benötigt, wollen wir hier diese noch etwas näher erklären, und auch die Grössenordnung dieser Korrekturen anschauen.

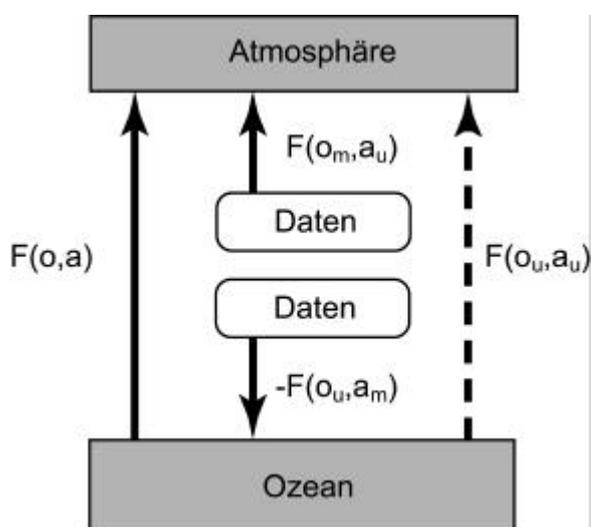
Flusskorrekturen für Wärme-, Wasser-, und Impulsflüsse bestehen darin, zeitlich konstante künstliche Quellen und Senken zusätzlich an den Rändern der einzelnen Modellkomponenten vorzuschreiben. Man koppelt die verschiedenen Komponenten dann nicht voll, sondern nur über ihre Abweichungen von einem unabhängig aufrechterhaltenen Gleichgewichtszustand. Man spricht auch in diesem Zusammenhang von *anomaly coupling*.

Man kann die Flusskorrektur wie folgt darstellen. Sei $F(o,a)$ der Wärmefluss vom Ozean (o) zur Atmosphäre (a), wie er aus dem voll gekoppelten Modell hervorgeht, d.h. berechnet aus den



Figur 8.9: Klimadrift in einem einfachen gekoppelten Modell (Bern 2.5d Modell), der zum Zeitpunkt der Kopplung beginnt ($t = 4000$ Jahre). Der Salzgehalt des Pazifiks nimmt stetig zu; auch die Energiebilanz ist nicht mehr erfüllt (oben). Dies führt zu einer Veränderung der meridionalen Zirkulation (unten), dargestellt durch die Stromfunktion. (Figur von Stocker et al., 1992, *J. Climate* 5, 773).

Variablen T_O und T_A in (8.1). Nun bezeichne $F(o_u, a_u)$ den Wärmefluss, der das ungekoppelte Modell benötigt, d.h. in dem $T_{O,u}$ und $T_{A,u}$ verwendet werden. Andererseits sei $F(o_u, a_m)$ der Wärmefluss, der auf fixen Messwerten der Atmosphäre (a_m) und Werten des ungekoppelten Ozeanmodells (o_u) beruhen. Dies ist in Figur 8.10 illustriert.



Figur 8.10: Schematische Darstellung der verschiedenen Flüsse bei Flusskorrektur in gekoppelten Klimamodellen. "Daten" bezeichnen gemessene Klimatologien.

Anstatt nun das Ozeanmodell mit den voll gekoppelten Flüssen $F(o,a)$ anzutreiben, ersetzt man $F(o,a)$ durch

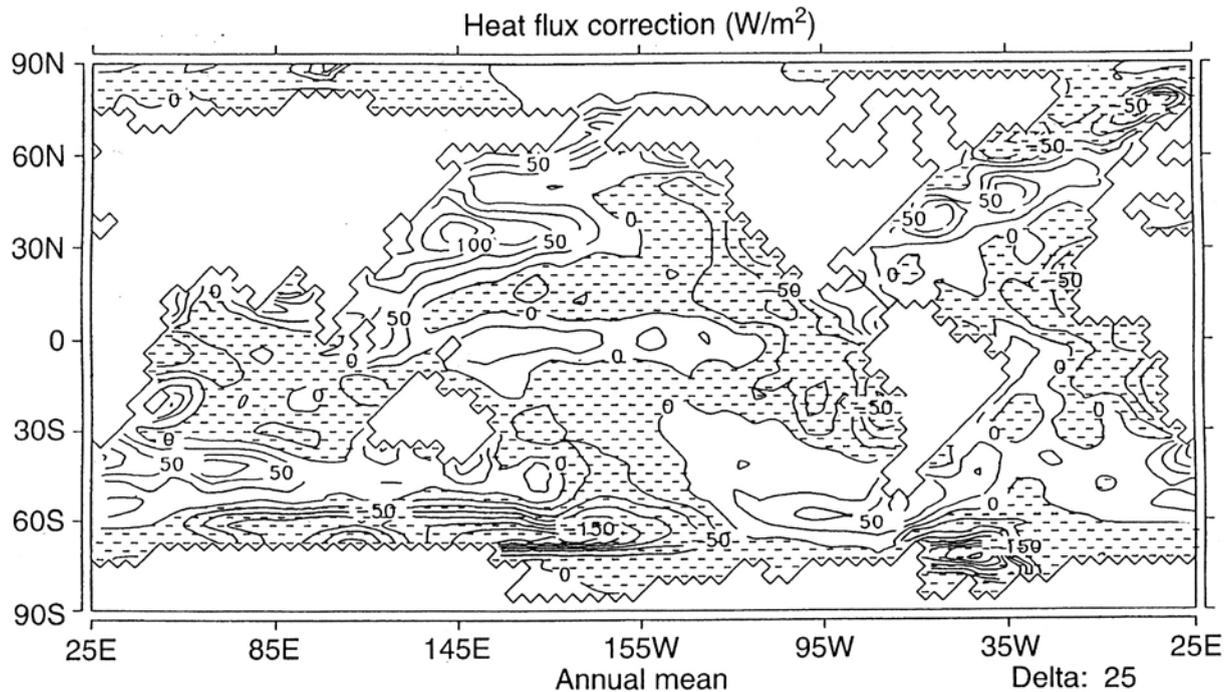
$$\tilde{F}_o(o,a) = F(o,a) + \underbrace{\{F(o_u, a_m) - F(o_u, a_u)\}}_{FO}, \quad (8.23)$$

wobei FO die Flusskorrektur für das Ozeanmodell ist. $FO = 0$, falls die Variablen vom ungekoppelten Atmosphärenmodell exakt mit den gemessenen Größen übereinstimmen, also formal $a_u = a_m$. Analog haben wir für das Atmosphärenmodell

$$\tilde{F}_a(o,a) = F(o,a) + \underbrace{\{F(o_m, a_u) - F(o_u, a_u)\}}_{FA}, \quad (8.24)$$

wobei FA die Flusskorrektur für das Atmosphärenmodell ist. Die Differenz $\tilde{F}_o - \tilde{F}_a$ ist die künstliche netto Quelle von Wärme, die aufgrund der Abweichungen von modellierten Flüssen im ungekoppelten Mode von den gemessenen Flüssen zustande kommt. Die Korrekturen in (8.23) und (8.24) erreichen dieselbe Größenordnung wie die Flüsse selbst. Für den Wärmefluss ist dies in Fig 8.11 gezeigt, für den Wasserfluss in Fig. 8.12.

Anhand einfacher Modelle und Überlegungen kann man wenigstens zeigen, dass bei relativ kleinen Veränderungen (z.B. Klimasimulation der nächsten 50 Jahre) die Flusskorrekturen keine fundamental verschiedenen Resultate von denjenigen ohne Flusskorrektur liefern. Trotzdem ist höchste Vorsicht bei der Interpretation solcher Modelle empfohlen.



Figur 8.11: Korrektur des Wärmeflusses. Besonders in Bereichen starker Ozeanströmungen (Golfstrom, und Kuroshio), sowie in Gebieten der Tiefenwasserbildung (Norwegisches und Weddell Meer), treten sehr hohe Flüsse auf. (Figur aus Schiller et al., 1997, *Climate Dyn.* 13, 325).

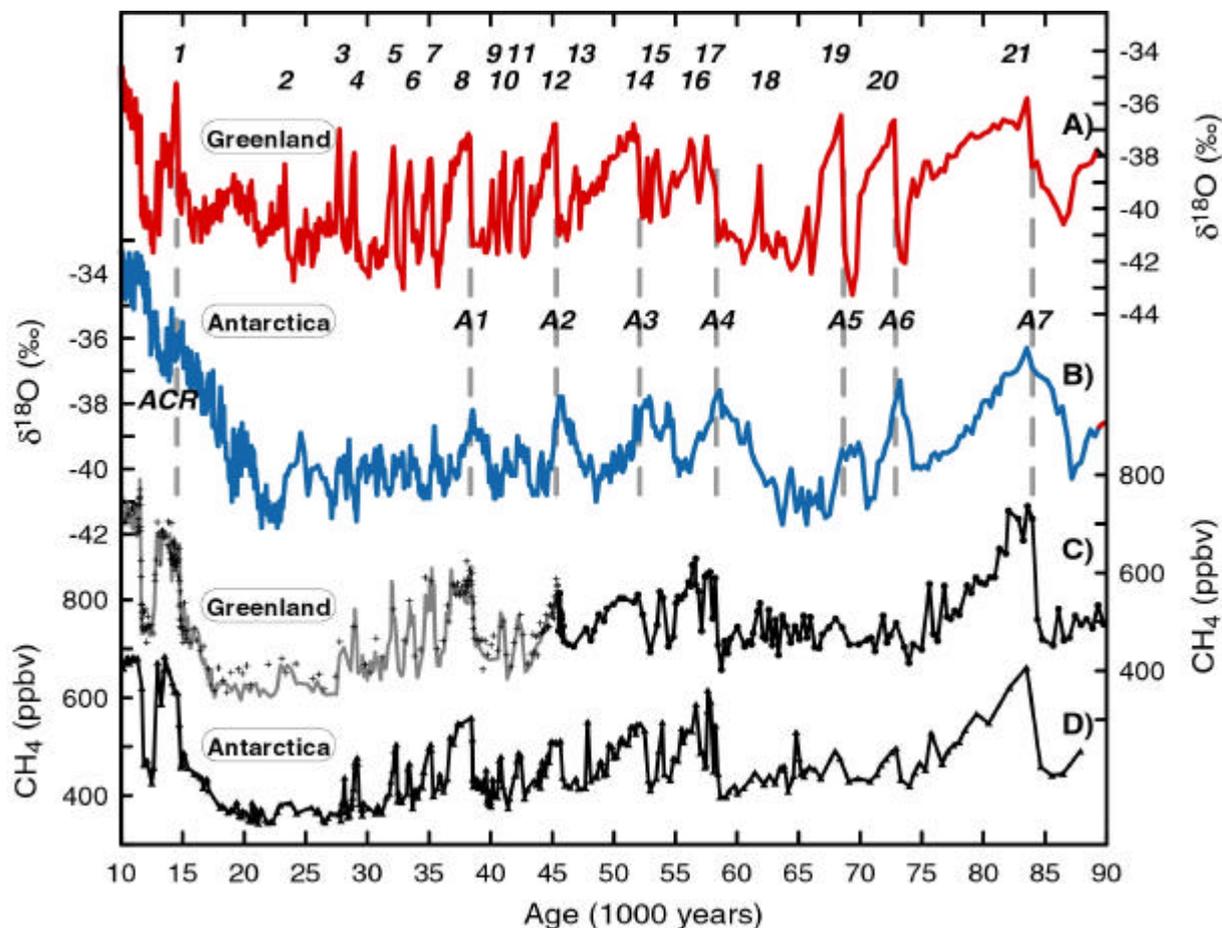


Figur 8.12: Korrektur des Wasserflusses in m/Jahr. Besonders in Bereichen starker Ozeanströmungen (Golfstrom), sowie in Gebieten der Tiefenwasserbildung (Norwegisches und Weddell Meer), wie auch an Osträndern treten sehr hohe Flüsse auf. (Figur aus Manabe & Stouffer, 1988, *J. Climate* 9, 841.).

9 Multiple Gleichgewichte im Klimasystem

9.1 Abrupte Klimawechsel aufgezeichnet in polaren Eisbohrkernen

Die detailliertesten Informationen über vergangene Klimazustände der letzten 500'000 Jahre erhält man aus polaren Eisbohrkernen. Ein Beispiel ist in Figur 9.1 gezeigt. Das Holozän, die gegenwärtige Warmzeit, hat vor ca. 10'000 Jahren begonnen, nachdem die letzte Eiszeit vor 11'650 Jahren abrupt zu Ende ging. Dieses Ende hat sich aber bereits vor 20'000 Jahren angekündigt. Im antarktischen Eisbohrkern stellt man eine Zunahme der Isotopenkonzentrationen des Eises (stabile Isotope des Wassermoleküls sind ein Mass für die lokale Temperatur) bereits zu diesem Zeitpunkt fest. Die Temperaturindikatoren belegen, dass sich das Klima während der letzten Eiszeit in Grönland über 20 Mal abrupt verändert hat. Diese abrupten Erwärmungen, die in Fig. 9.1 nummeriert sind, werden *Dansgaard-Oeschger Ereignisse* (*Dansgaard-Oeschger events, D/O events*) genannt, in Erinnerung an die Forschungsarbeiten der



Figur 9.1: Einzigartige Klimageschichte der letzten 90'000 Jahre aufgezeichnet in Eisbohrkernen von Grönland und der Antarktis. A) Sauerstoffisotopenkonzentration ^{18}O (in Promille Abweichung von einem definierten Standard) im GRIP Kern aus Grönland; B) ^{18}O im Byrd Kern aus der Antarktis; C) Methankonzentration am GRIP Kern; D) Methankonzentration am Byrd Kern. Im Eisbohrkern sind 21 Dansgaard/Oeschger events registriert mit unterschiedlicher Dauer der vorangehenden Abkühlung. Die längsten D/O Ereignisse haben ein korrespondierendes Warm-Ereignis im antarktischen Kern; diese sind mit A1 bis A7 bezeichnet. Alle D/O Ereignisse sind durch abrupte Peaks im Methan gekennzeichnet, was die Synchronisierung der Zeitskalen von Grönland- und Antarktiseisbohrkernen ermöglicht. (Figur von Blunier & Brook, 2001, *Science* 291, 109)

zwei Pioniere *Willy Dansgaard* und *Hans Oeschger* (1927-1998). Diese Klimaphasen zeigen alle eine abrupte Erwärmung innerhalb eines Jahrzehnts, und eine nachfolgende allmähliche Abkühlung über etwa 1000-3000 Jahre. Interessant ist die Beobachtung, dass die Isotopenmaxima und -minima während der ganzen Eiszeit etwa auf denselben Niveaux zu liegen kommen. Hans Oeschger vermutete bereits 1984, dass das Klimasystem ähnlich einem physikalischen Flip-flop funktionieren sollte, und dass wahrscheinlich die Ozeanzirkulation im Atlantik für diese Klimasprünge verantwortlich ist. Flip-flop Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass sie mehrere stabile Gleichgewichtszustände haben. Das Lorenz-Saltzman Model (Kap. 7.2) ist ein klassisches Beispiel.

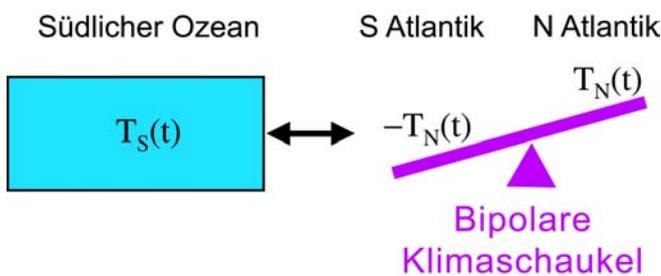
Nachdem 1986 durch *Frank Bryan* (*Nature* 323, 301) mit einem 3-dimensionalen Ozeanzirkulationsmodell gezeigt wurde, dass tatsächlich mehrere Zustände der thermohalinen Zirkulation realisiert werden können, hat *Wally Broecker* in mehreren Arbeiten die vorliegenden Resultate aus verschiedenen Klimaarchiven in einer Synthese vorgestellt, und überzeugend argumentiert, dass schnelle Schwankungen der "atlantischen Wärmepumpe" (also der thermohalinen Zirkulation) für die abrupten Klimawechsel verantwortlich sind, die in den Grönland-Eisbohrkernen, in Baumringen, in See- und Meeressedimenten, und in vielen anderen Paläoklimaarchiven gefunden wurden. Einige relevante wissenschaftlichen Arbeiten zu diesem Thema seien hier angeführt:

- Alley, R.B., J. Marotzke, W.D. Nordhaus, J.T. Overpeck, D.M. Peteet, R.A. Pielke Jr., R.T. Pierrehumbert, P.B. Rhines, T.F. Stocker, L.D. Talley and J.M. Wallace, 2003: Abrupt climate change. *Science*, **299**, 2005-2010.
- Blunier, T. and E.J. Brook, 2001: Timing of millennial-scale climate change in Antarctica and Greenland during the last glacial period. *Science*, **291**, 109-112.
- Blunier, T., J. Chappellaz, J. Schwander, A. Dällenbach, B. Stauffer, T.F. Stocker, D. Raynaud, J. Jouzel, H.B. Clausen, C.U. Hammer and S.J. Johnsen, 1998: Asynchrony of Antarctic and Greenland climate change during the last glacial period. *Nature*, **394**, 739-743.
- Broecker, W.S., 1997: Thermohaline circulation, the Achilles heel of our climate system: will man-made CO₂ upset the current balance? *Science*, **278**, 1582-1588.
- Broecker, W.S. and G.H. Denton, 1989: The role of ocean-atmosphere reorganizations in glacial cycles. *Geochim. Cosmochim. Acta*, **53**, 2465-2501.
- Broecker, W.S., D.M. Peteet and D. Rind, 1985: Does the ocean-atmosphere system have more than one stable mode of operation? *Nature*, **315**, 21-25.
- Clark, P.U., N.G. Pisias, T.F. Stocker and A.J. Weaver, 2002: The role of the thermohaline circulation in abrupt climate change. *Nature*, **415**, 863-869.
- Dansgaard, W., S.J. Johnsen, H.B. Clausen, D. Dahl-Jensen, N. Gundestrup, C.U. Hammer and H. Oeschger, 1984: North Atlantic climatic oscillations revealed by deep Greenland ice cores. In: *Geophysical Monograph: Climate Processes and Climate Sensitivity* (29) [Hansen, J. E. and T. Takahashi (eds.)]. American Geophysical Union, Washington, 288-298.
- Dansgaard, W., S.J. Johnsen, H.B. Clausen, D. Dahl-Jensen, N.S. Gundestrup, C.U. Hammer, C.S. Hvidberg, J.P. Steffensen, A.E. Sveinbjörnsdóttir, J. Jouzel and G. Bond, 1993: Evidence for general instability of past climate from a 250-kyr ice-core record. *Nature*, **364**, 218-220.
- Knutti, R., J. Flückiger, T.F. Stocker and A. Timmermann, 2004: Strong hemispheric coupling of glacial climate through freshwater discharge and ocean circulation. *Nature*, in press.
- Manabe, S. and R.J. Stouffer, 1988: Two stable equilibria of a coupled ocean atmosphere model. *J. Clim.*, **1**, 841-866.
- Manabe, S. and R.J. Stouffer, 1994: Multiple-century response of a coupled ocean-atmosphere model to an increase of atmospheric carbon dioxide. *J. Clim.*, **7**, 5-23.
- Oeschger, H., J. Beer, U. Siegenthaler, B. Stauffer, W. Dansgaard and C.C. Langway, 1984: Late glacial climate history from ice cores. In: *Geophysical Monograph Series: Climate Processes and Climate Sensitivity* (29) [Hansen, J. E. and T. Takahashi (eds.)]. American Geophysical Union, Washington, 299-306.
- Rahmstorf, S., 2002: Ocean circulation and climate during the past 120,000 years. *Nature*, **419**, 207-214.
- Stocker, T.F., 1998: The seesaw effect. *Science*, **282**, 61-62.
- Stocker, T.F., 2000: Past and future reorganization in the climate system. *Quat. Sci. Rev.*, **19**, 301-319.
- Stocker, T.F. and S.J. Johnsen, 2003: A minimum thermodynamic model for the bipolar seesaw. *Paleoceanogr.*, **18**, 1087, doi: 10.1029/2003PA000920.
- Stocker, T.F. and O. Marchal, 2000: Abrupt climate change in the computer: is it real? *PNAS*, **97**, 1362-1365.

Stocker, T.F. and D.G. Wright, 1991: A zonally averaged model for the thermohaline circulation. Part II: Interocean exchanges in the Pacific -Atlantic basin system. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1725-1739.

9.2 Die bipolare Klimaschaukel

Viele Klimaarchive unterstützen die Hypothese, dass der Ozean hauptverantwortlich für diese abrupten Schwankungen ist. Ein plötzliches Abstellen der Tiefenwasserbildung im Nordatlantik verursacht eine Reduktion des meridionalen Wärmeflusses und somit eine abrupte Abkühlung im nortatlantischen Raum. Umgekehrt bewirkt ein abruptes Anspringen der Zirkulation eine Erwärmung. Die Hypothese macht einige Voraussagen, die in den Klimaarchiven getestet werden können. Eine aktive meridionale Strömung im Atlantik entzieht dem Südatlantik Wärme. Ein Abstellen der Wärmepumpe wird deshalb eine Erwärmung des Südatlantiks zur Folge haben und müsste somit als Fernfeldwirkung beobachtbar sein. Dies hat zur Formulierung der sogenannten "bipolaren Klimaschaukel" als Paradigma zur Wechselwirkung von Nord- und Südhemisphäre während abrupten Klimaschwankungen geführt (Broecker, 1998, *Paleoceanography* 13, 119; Stocker, 1998, *Science* 282, 61). Die Klimaschaukel ist in Figur 9.2 dargestellt und veranschaulicht, dass eine abrupte Erwärmung im Norden zu einer abrupten Abkühlung im Südatlantik führt, bzw. umgekehrt. Koppelt man die Schaukel mit einem grossen Wärmereservoir, bewirkt eine abrupte Abkühlung im Südatlantik eine langsame, kontinuierliche Abkühlung im südlichen Ozean. So kann in einfachster Weise der unterschiedliche Charakter von Temperatursignalen, wie sie in Grönland und der Antarktis aus Eisbohrkernen rekonstruiert werden (Fig. 9.1), erklärt werden (Stocker & Johnsen, 2003).



Figur 9.2: Bipolare Klimaschaukel gekoppelt mit einem südlichen Wärme reservoir. (Figur nach Stocker & Johnsen, 2003)

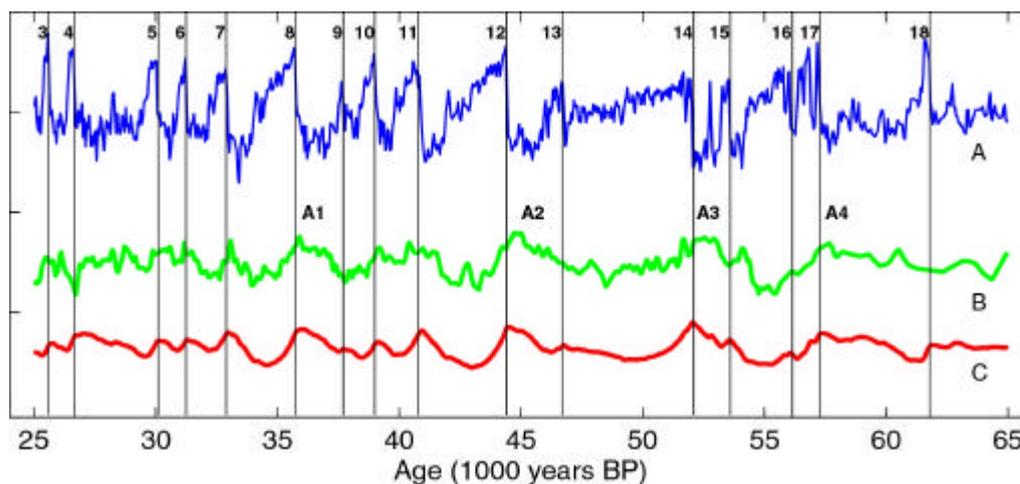
Die einfache bipolare thermische Klimaschaukel wird durch eine Energiebilanz des südlichen Ozeans formuliert:

$$\frac{dT_S(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot (-T_N(t) - T_S(t)) \quad (9.1)$$

wobei T_S die Temperatur des südlichen Ozeans, und T_N die Temperatur in Grönland darstellt. τ ist eine charakteristische Zeitskala für den Wärmeausgleich des südlichen Ozeans. Ist nun $T_N(t)$ bekannt, so kann die zeitliche Entwicklung von $T_S(t)$ durch eine Laplacetransformation von (9.1) bestimmt werden:

$$T_S(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t T_N(t-t') \cdot e^{-t'/\tau} dt' + T_S(0) \cdot e^{-t/\tau} \quad (9.2)$$

T_S ist also vollständig durch die zeitliche Entwicklung von T_N bestimmt, und stellt die nördliche Temperatur mit einer "abschwächenden Erinnerung" dar. Nehmen wir nun dieses einfache Modell zu Hilfe, um die unterschiedliche zeitliche Entwicklung der Temperaturen in Grönland und der Antarktis zu erklären. Durch Anpassen des einzigen freien Parameters τ suchen wir die grösstmögliche Korrelation zu erreichen zwischen modelliertem T_S aufgrund von (9.2) mit Input der bekannten Temperatur T_N aus dem Grönlandeisbohrkern, und T_S aus dem Antarktischen Eisbohrkern. Für $\tau \approx 1100$ Jahre wird die maximale Korrelation von 0.77 erreicht. Somit kann aus der Kenntnis der Grönlandtemperatur eine erstaunlich genaue Voraussage der Antarktistemperatur gemacht werden.



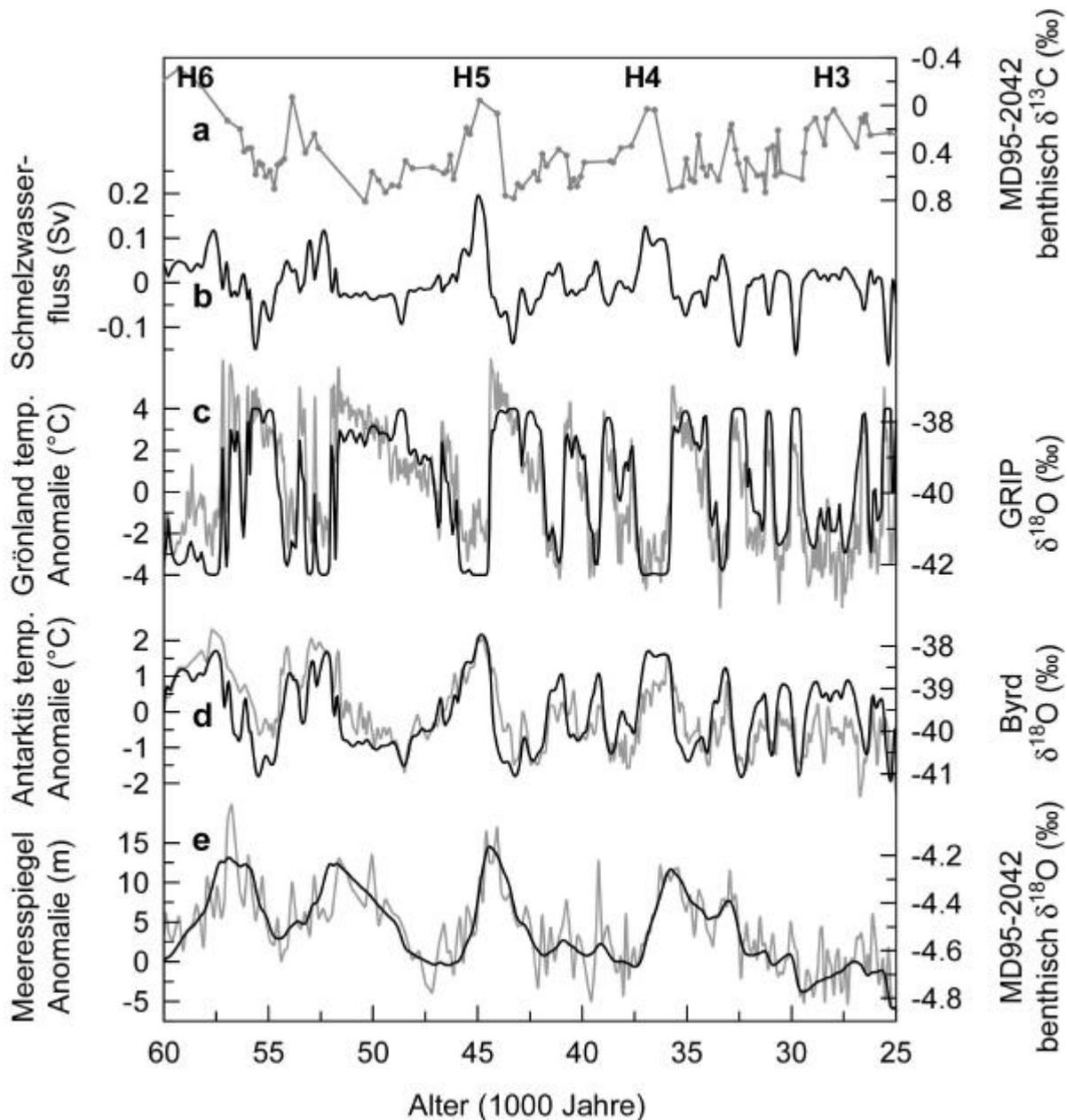
Figur 9.3: Hochpassgefilterte Zeitreihen der Temperaturen in Grönland (A) und der Antarktis (B) aus Eisbohrkernen, und (C), simulierte Temperaturen gemäss (9.2) mit Input (A). Die Stadiale in der Antarktis (A1, A2, ...) sind somit eine Manifestierung der abrupten Dansgaard/Oeschger Ereignisse im Norden. (Figur aus Stocker & Johnsen, 2003).

Obwohl dieses einfache Konzept einen erstaunlich grossen Teil der Variabilität zu erklären vermag, ist die erforderliche lange Zeitskala τ von über 1000 Jahren inkompatibel mit den Resultaten aus allgemeinen Zirkulationsmodellen des Ozeans (OGMs), die nur ca. 100 bis 200 Jahre als typische Austauschzeiten des südlichen Ozeans simulieren.

Neueste Studien haben gezeigt, dass eine Modifikation der thermischen bipolaren Klimaschaukel dieses Dilemma auflösen kann. Knutti et al. (2004, *Nature*, in press) haben mit einem gekoppelten Klimamodell gezeigt, dass (9.1) um einen weiteren Term ergänzt werden muss, der die Wirkung des Schmelzwassereintrags direkt berücksichtigt. Die Gleichung (9.1) wird wie folgt modifiziert:

$$\frac{dT_S(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot (-a \cdot T_N(t) + b \cdot F(t) - T_S(t)) \quad (9.3)$$

wobei $F(t)$ der Schmelzwasserfluss in den Nordatlantik bezeichnet. Die Konstanten a , b und τ werden aus dem gekoppelten Klimamodell bestimmt ($a = 0.41$, $b = 3.6 \text{ C Sv}^{-1}$, $\tau = 114$ Jahre). Gleichung (9.3) beschreibt die "thermische Schmelzwasser-Klimaschaukel", und sagt aus, dass der Eintrag von Schmelzwasser ebenfalls direkt die Wärmebilanz des südlichen Ozeans beeinflusst. Falls $F(t)$ bekannt wäre, könnte wiederum durch Laplacetransformation von (9.3) nach T_S aufgelöst werden. Da die Datenlage der Paläozeanographie gegenwärtig dies aber nicht



Figur 9.4: Variabilität der Grönland (c) und Antarktis (d) Temperatur aus Eisbohrkernen, und aus Proxydaten aus einemhochauflösenden Tiefseesedimentkern vor Portugal (e, Shackleton et al., 2000, *Paleoceanography* 15, 565). Gemessene Daten sind in Grau gegeben, nach (9.3) modellierte Daten mit Input der Grönlandtemperatur sind die schwarzen Kurven. Der Schmelzwasserfluss (b) wird durch Optimierung der Übereinstimmung der grauen und schwarzen Kurven in (c) bis (e) erhalten. Die Übereinstimmung von (a) und (b) ist ein unabhängiger Test der Gültigkeit von Gleichung (9.3). (Figur aus Knutti et al., 2004).

erlaubt, schätzt man $F(t)$ durch optimalen Fit mit $T_S(t)$ und $T_N(t)$ ab. Details sind in der Arbeit von Knutti et al. (2004, *Nature*, in press) beschrieben. Das Resultat ist in Figur 9.4 dargestellt. Die thermische Schmelzwasser-Klimaschaukel erklärt nicht nur alle Dansgaard/Oeschger Ereignisse in ihrer Amplitude und Dauer, sondern auch die Stadiale in der Antarktis, sowie den Verlauf des Meeresspiegels, wie er durch die ^{18}O -Isotopenkonzentrationen in Tiefseeforaminiferen aufgezeichnet ist. Die simulierten Schmelzwassereinträge von 60'000 bis 25'000 Jahre vor heute (Endphase der letzten Eiszeit) stimmen mit den ^{13}C -Isotopenkonzentrationen in Oberflächenforaminiferen überein, die als Mass für den Schmelzwassereintrag in den Atlantik dienen.

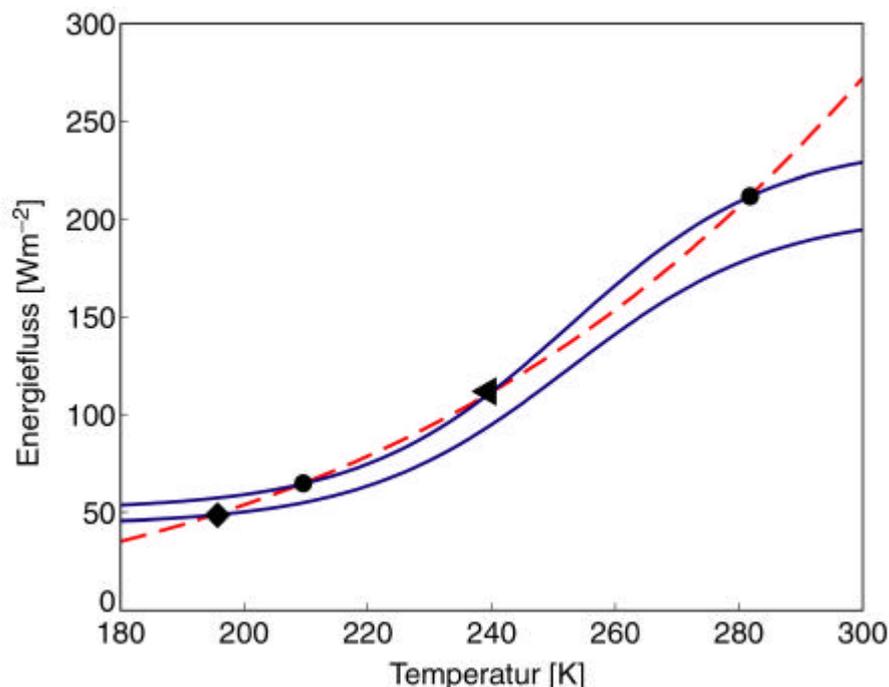
9.3 Multiple Gleichgewichte in einem einfachen Atmosphärenmodell

Aus der Geologie war klar, dass die Erde auch durch Phasen der fast vollständigen Vereisung gegangen ist. Wie könnte das bei einer ungefähr gleichen Sonneneinstrahlung zustande kommen? Eine mögliche Antwort liefert bereits das einfache Energiebilanzmodell, das in Kapitel 2.2 vorgestellt wurde, falls der Eis-Albedo Feedback berücksichtigt wird (Abschnitt 2.4.1). Betrachtet man die Gleichgewichtszustände der Energiebilanz (2.1) und parametrisiert man die Albedo analog zu (2.22) aber in kontinuierlicher Form, wie in Fig. 2.11 abgebildet, so entsteht eine Energiebilanzgleichung, die nichtlinear in T ist:

$$\left(1 - \left\{0.575 - 0.275 \cdot \tanh(0.03 \text{ K}^{-1} \cdot (T - 252.5 \text{ K}))\right\}\right) \cdot \frac{S}{4} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (9.4)$$

Die linke und rechte Seite von (9.4) ist in Fig. 9.5 für die zwei Fälle der Solarkonstanten $S = 1367 \text{ Wm}^{-2}$ und $S^* = 0.85 \cdot S$ dargestellt. Für den heutigen Wert der Solarkonstanten existieren 3 Gleichgewichte, wovon zwei stabil sind, die mit Punkten gekennzeichnet sind. Dabei handelt es sich um einen "warmen" und ein "kalten" Klimazustand. Im Falle einer um 15% schwächeren Solarkonstante (*faint young sun*), liegt nur ein einziges stabiles Gleichgewicht vor, das ein kaltes Klima zeigt. Es geht ebenfalls aus Fig. 9.5 hervor, dass die Struktur der Lösung sehr stark von der Parametrisierung des Eis-Albedo Feedbacks abhängen wird. Wählt man zum Beispiel eine Parametrisierung der Albedo mit einer weniger steilen Steigung, so rücken die beiden stabilen Gleichgewichtspunkte gegen den instabilen, wo sie sich zu einem einzigen stabilen Gleichgewicht vereinigen.

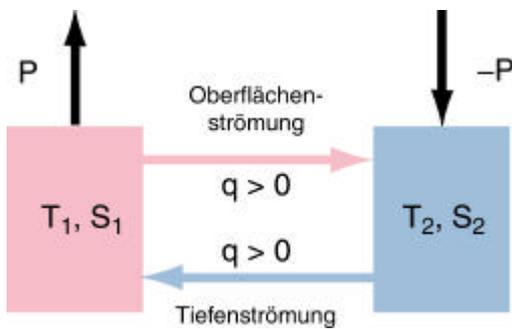
Die Frage ist, ob auch bei komplexeren Klimamodellen, zum Beispiel bei gekoppelten Atmosphären-Ozeanmodellen, mehrfache Gleichgewichtszustände auftreten.



Figur 9.5: Rechte (gestrichelt) und linke Seite von (9.4) für S (obere Kurve) und $0.85 S$. Die Temperaturabhängigkeit der Albedo ermöglicht mehrere Gleichgewichtslösungen: stabile (Punkte und Rhombus) und instabile (Dreieck).

9.4 Multiple Gleichgewichte in einem einfachen Ozeanmodell

Die Tiefenzirkulation im Atlantik ist mit einem grossen Wärmetransport verbunden, der das Klima im nordatlantischen Raum wesentlich beeinflusst. Dieser Wärmetransport ist für ein vergleichsweise mildes Klima verantwortlich. Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts haben Geologen die Vermutung geäussert, dass Änderungen der Ozeanzirkulation für Klimaschwankungen verantwortlich sein könnten. Henry Stommel hat dann 1961 ein konzeptuelles Modell vorgestellt, das solche Veränderungen zeigen kann, da es mehrere Gleichgewichtszustände aufweist (Stommel, 1961, *Tellus* 13, 224). Dieses Modell sei hier in der von Marotzke vereinfachten Form vorgestellt (Marotzke, 2000, *PNAS* 97,1347). Der Grund für mehrere Gleichgewichte ist darin zu suchen, dass Wärme- und Wasserflüsse unterschiedlich auf Anomalien reagieren. Gemischte Randbedingungen tragen diesem Phänomen Rechnung, aber auch unterschiedliche Relaxationszeiten in (8.10) und (8.16) können mehrere Gleichgewichte hervorrufen.



Figur 9.6: 2-Box Modell der thermohalinen Zirkulation. (Nach Stommel, 1961 und Marotzke, 2000).

Der Ozean wird extrem vereinfacht durch 2 Boxen dargestellt, eine für niedere Breiten, wo Verdunstung dominiert, und somit ein positiver Wasserfluss P vorliegt, und eine Box für hohe Breiten, wo der Niederschlag überwiegt (Fig. 9.6). T_i und S_i sind die Temperaturen und Salinitäten der beiden Boxen. Die Annahme ist, dass zwischen den Boxen ein fixer Temperaturkontrast ΔT herrscht, der durch Wärme-flüsse zwischen Atmosphäre und Ozean aufrecht-erhalten wird. Zwischen hohen und niederen Breiten entsteht ein Wassertransport q , der durch meridion-ale Dichteunterschiede getrieben wird, gemäss

$$q = k \cdot (\rho_2 - \rho_1) = k \cdot \rho_0 \cdot (\alpha \cdot (T_2 - T_1) + \beta \cdot (S_2 - S_1)) , \quad (9.5)$$

wobei (8.13) verwendet wurde. Die Bilanz des Salzgehaltes lautet in den beiden Boxen

$$\frac{dS_1}{dt} = |q| \cdot (S_2 - S_1) + P , \quad \frac{dS_2}{dt} = |q| \cdot (S_1 - S_2) - P , \quad (9.6)$$

wobei $P > 0$ den Netto Wasserfluss bezeichnet. In (9.6) tritt der Betrag von q auf, weil für den Austausch die Richtung der Strömung keine Rolle spielt. Es können nun stationäre Lösungen von (9.6) gefunden werden, die gegeben sind durch

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \begin{cases} -\frac{\alpha \cdot \Delta T}{2 \cdot \beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha \cdot \Delta T}{2 \cdot \beta}\right)^2 - \frac{P}{k \cdot \beta}} & q > 0 \\ -\frac{\alpha \cdot \Delta T}{2 \cdot \beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha \cdot \Delta T}{2 \cdot \beta}\right)^2 + \frac{P}{k \cdot \beta}} & q < 0 \end{cases} , \quad (9.7)$$

wobei $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$. Für die direkte Zirkulation, d.h. $q > 0$ und somit $\rho_2 > \rho_1$, gibt es zwei Lösungen, eine mit kleinerem Salzkontrast, und eine mit einem grossen negativen ΔS . Man setzt nun

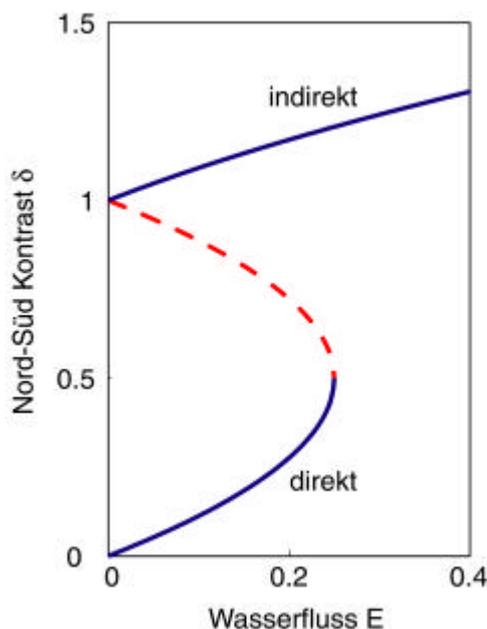
$$\delta = -\frac{\beta \cdot \Delta S}{\alpha \cdot \Delta T}, \quad E = \frac{\beta \cdot P}{k \cdot (\alpha \cdot \Delta T)^2}, \quad (9.8)$$

und erhält aus (9.7)

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - E} & q > 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + E} & q < 0 \end{cases}. \quad (9.9)$$

Der Transport q ist gegeben durch

$$q = k \cdot \rho_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot (1 - \delta) \quad (9.10)$$

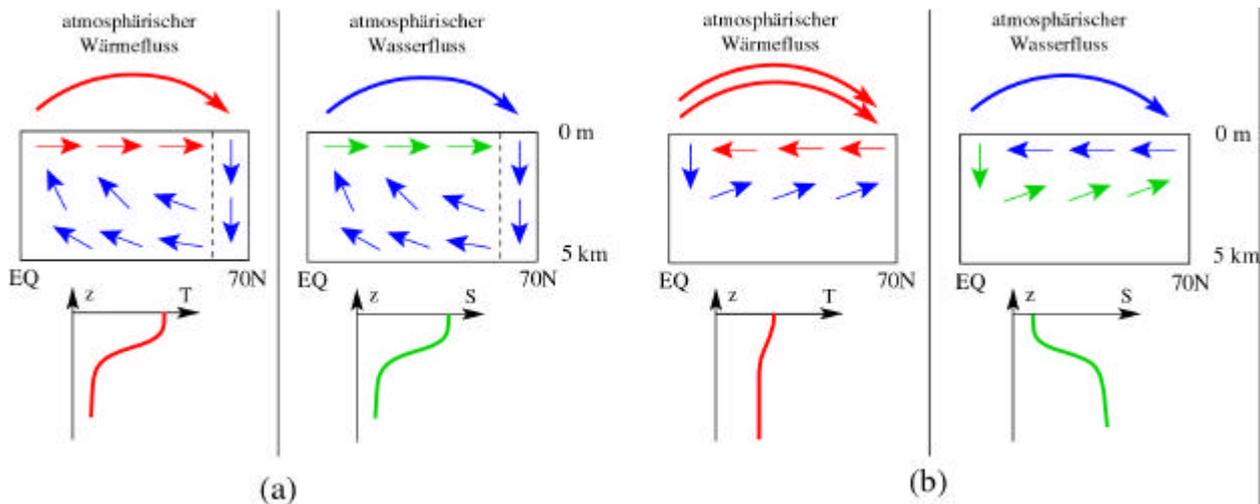


Figur 9.7: Multiple Gleichgewichte (instabil = gestrichelt) der thermohalinen Zirkulation für verschiedene Werte des Wasserflusses im Stommel Box Modell.

Für $\delta > 1$ ist die Zirkulation *indirekt*, d.h. Wasser sinkt, wo es wärmer ist. Um die zum Sinken genügende Dichte zu erreichen, muss der Salzgehalt entsprechend hoch sein. Für $\delta < 1$ resultieren zwei Lösungen, wovon eine instabil ist (Fig. 9.7). Für die *direkte* Zirkulation (Wasser sinkt, wo es kälter ist) ist $q > 0$. Wenn P zunimmt, dann nimmt E , und somit δ zu. Dies bedeutet aber eine Verringerung von q . Ein verstärkter hydrologischer Kreislauf *bremst* die thermohaline Zirkulation.

Für $0.5 < \delta < 1$, also $0 < q < \frac{1}{2} k \cdot \rho_0 \alpha \cdot \Delta T$ ist die Zirkulation instabil. Das Modell zeigt also einen Schwellenwert für q , unterhalb welchem die thermohaline Zirkulation nicht existiert. Es ist zu beachten, dass in diesem einfachen Modell der meridionale Temperaturkontrast diesen Schwellenwert direkt bestimmt.

Die Existenz mehrerer Gleichgewichte der thermohalinen Zirkulation kann man plausibel machen, indem man Wärme- und Wassertransport betrachtet, wie sie in Fig. 9.8 schematisch gezeigt werden. In Fig. 9.8a ist die Zirkulation direkt. Mit den typischen Profilen von T und S (je hohe Werte an der Oberfläche) transportiert der Ozean Wärme und Salz nach Norden. Der Kreislauf der Flüsse wird geschlossen durch einen Überschuss an Wärme im äquatorialen Bereich und Abkühlung im Norden, bzw. durch den atmosphärischen Wassertransport. Derselbe Wassertransport kann aber durch eine umgekehrte Zirkulation, wie dies in (b) gezeigt ist,



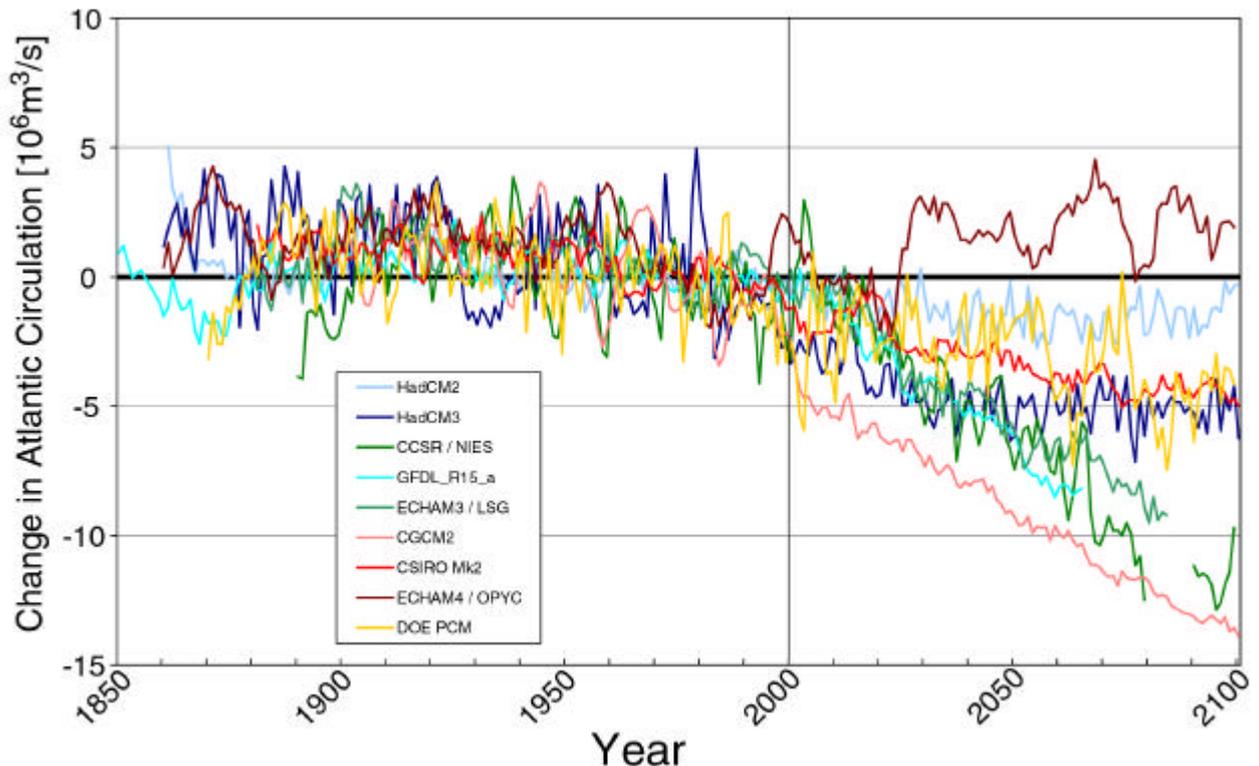
Figur 9.8: Schematische Darstellung der thermohalinen Strömung und der meridionalen Wärme- und Wasserflüsse. (a) Direkte Zirkulation: Wasser sinkt, wo es kalt ist; (b) indirekte Zirkulation: Wasser sinkt in warmen Gebieten.

erfolgen, falls der vertikale Gradient von S das Vorzeichen wechselt. Es sind also bedeutende Umlagerungen des Salzgehaltes nötig, um Zirkulationsänderung im Ozean hervorzurufen. Es wurde im Zusammenhang mit den gemischten Randbedingungen erwähnt, dass in solchen Modellen sich der Salzgehalt an der Ozeanoberfläche uneingeschränkt ändern kann, eine Voraussetzung, um den Zustand (b) in Fig. 9.8 zu erreichen.

9.5 Multiple Gleichgewichte in gekoppelten Modellen

Die Arbeit von Manabe und Stouffer (1988, *J. Climate* 1, 841) stellte zum ersten Mal Resultate mit einem gekoppelten Klimamodell vor, in dem für gegenwärtige Klimaparameter zwei verschiedene Zustände gefunden wurden. Diese unterschieden sich vor allem durch die thermohaline Zirkulation im Atlantik. Der eine Zustand weist eine aktive Tiefenwasserbildung im Nordatlantik auf, der andere Zustand hatte eine Strömung im Atlantik, die ähnlich derjenigen im Pazifik war. Übergänge zwischen den Zuständen können durch kurzfristige Veränderungen der Wasserbilanz im Nordatlantik ausgelöst werden. Ähnliche Resultate wurden auch in anderen gekoppelten Modellen gefunden.

Es ist deshalb wahrscheinlich, dass die Tiefenzirkulation im Atlantik sensitiv auf Veränderungen der Wasserbilanz reagieren kann. Damit liegt ein plausibler Mechanismus vor, die abrupten Schwankungen, die in den Klimazeitreihen gefunden werden (z. B. Fig. 9.1), zu erklären. Eine Hypothese sagt, dass während der Eiszeit die um den Nordatlantik positionierten Eisschilder jeweils grosse Wassereinträge in den Atlantik verursachen, die durch Vorstossen von Eisströmen zustande kommen. Diese Situation ist verstärkt während dem Ende der letzten Eiszeit aufgetreten, wo das Schmelzen der Eisschilder der Nordhemisphäre zu einem Anstieg des Meeresspiegels von insgesamt 120 m geführt hat. Während dieser Zeit sind die letzten abrupten Klimaschwankungen beobachtet worden.



Figur 9.9: Veränderung der thermohalinen Zirkulation in 9 gekoppelten Klimamodellen für ein einfaches Erwärmungsszenario in den nächsten 100 Jahren. Viele Modelle zeigen eine Abschwächung, doch ist die Unsicherheit recht gross. (Figur aus IPCC, 2001).

Die Wasserbilanz kann aber nicht nur durch Eintrag von Schmelzwasser verändert werden, sondern hängt auch wesentlich von der Stärke des meridionalen Wasserflusses, und somit vom hydrologischen Kreislauf ab. Es wird vermutet, dass in einem wärmeren Klima der Wasserkreislauf generell intensiver ist, da die Atmosphäre mehr Wasser aufnehmen kann, und durch höhere Temperaturen die Verdunstung wesentlich grösser ist. Die Frage ist nun, ob dieser zusätzliche Wassereintrag in den Atlantik kommt. Es gibt gekoppelte Modelle, die dies für die kommenden Jahrzehnte zeigen. Dies, und die Tatsache, dass eine Erwärmung des Oberflächenwassers ebenfalls die Dichte reduziert, und somit das Absinken der Wassermassen erschwert, lässt es plausibel erscheinen, dass die thermohaline Zirkulation im Atlantik in Zukunft wohl eher schwächer wird. Ob es allerdings zu einem Überqueren eines Schwellenwertes, und somit zu einem vollständigen Erliegen dieser für Nordeuropa so wichtigen Ozeanströmung kommen wird, ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

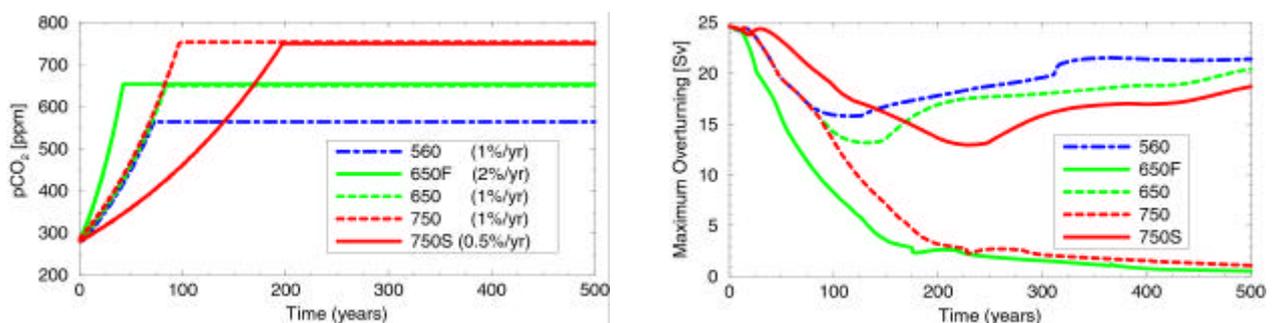
Das Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) hat sich diese Frage gestellt. In Fig. 9.9 ist die Veränderung der thermohalinen Zirkulation im Atlantik für die kommenden 100 Jahre für verschiedene gekoppelte Modelle unterschiedlicher Art dargestellt. Das Bild ist nicht einheitlich, doch scheint in der Tendenz eher eine Abschwächung dieser Zirkulation zu erwarten. Keines der Modelle simuliert jedoch eine Verstärkung.

Einfache Modelle zeigen, dass es einen Schwellenwert der Zirkulation gibt, unterhalb welchem ein vollständiger Zusammenbruch der Strömung ohne weitere äussere Einwirkung erfolgt. Das heisst, dass es einen Übergang zu einem zweiten stabilen Gleichgewicht gibt. Ein solches Verhalten könnte auch bei vollständigeren Modellen (3-dimensionale gekoppelte Atmosphären-

Ozeanmodelle ohne Flusskorrekturen) auftreten. Auch hier ist die Forschung jedoch noch nicht soweit, diese Frage schlüssig zu beantworten.

Simulationen mit einem vereinfachten gekoppelten Modell (Bern 2.5d Modell), das aus einem zonal gemittelten 3-Becken Ozeanmodell, und einem Energiebilanzmodell der Atmosphäre besteht, zeigen, dass das allfällige Überschreiten eines Schwellenwertes von mehreren wichtigen Größen im Klimasystem abhängt. Figur 9.10 gibt eine Zusammenfassung der Resultate. In diesen Simulationen wurden vereinfachte CO₂-Szenarien gewählt: nach einem exponentiellen Anstieg unterschiedlicher Geschwindigkeit wird die CO₂ Konzentration konstant gehalten. Die Entwicklung der thermohalinen Zirkulation lässt sich in zwei Klassen einteilen. Eine Gruppe zeigt ein lineares Verhalten, in dem eine vorübergehend starke Reduktion der Zirkulation eintritt, sich aber dann langfristig erholt. Die Reduktion der Strömung richtet sich nach dem Maximalwert der Erhöhung von CO₂, und somit der erfolgten Erwärmung. In der zweiten Klasse bricht die Zirkulation in den ersten 200 Jahren vollständig zusammen und erholt sich nicht mehr. Ein irreversibler Übergang zum zweiten stabilen Gleichgewicht ist erfolgt. Es ist interessant festzustellen, dass sowohl eine Reduktion des Maximalwertes von CO₂ (von Experiment 750 auf 650), wie auch eine Verlangsamung des Anstiegs von CO₂ (von Experiment 750 auf 750S) die Überquerung der kritischen Grenze verhindert. Es spielt deshalb eine wichtige Rolle, wie schnell eine künftige Erwärmung im Klimasystem erfolgt. Je nach Anstiegsrate und Erwärmung können demnach irreversible Veränderungen auftreten.

Es gibt Hinweise, dass ähnliches Verhalten in komplexeren Modellen ebenfalls vorliegt. Jedoch ist zu beachten, dass diese wesentlich mehr Freiheitsgrade aufweisen, und somit in verfeinerter Form auf Störungen reagieren können. Die Frage, ob multiple Gleichgewichte auch in den höchst-aufgelösten Modellen auftreten können, ist gegenwärtig ungelöst.



Figur 9.10: Simulationen mit dem Bern 2.5d Modell zur Entwicklung der thermohalinen Zirkulation im Atlantik bei einer Erwärmung. Die verschiedenen vereinfachten CO₂-Szenarien (links) bestehen aus einem exponentiellen Anstieg unterschiedlicher Geschwindigkeit bis zu einem vorgegebenen Maximalwert. Die thermohaline Zirkulation (rechts) weist eine Bifurkation im Verhalten auf: für kleine Maximalwerte oder langsame Anstiegsraten wird die Schwelle eines vollständigen Abstellens nicht überschritten. (Figur von Stocker & Schmittner, 1997, *Nature* 388, 862)

IPCC formuliert in seinem letzten Statusbericht eine vorsichtige Schlussfolgerung bezüglich dieser Problematik:

Most models project a weakening of the thermohaline circulation of the oceans resulting in a reduction of heat transport into high latitudes of Europe, but none show an abrupt shutdown by the end of the 21st century. However, beyond the year 2100, some models suggest that the thermohaline circulation could completely, and possibly irreversibly, shut down in either hemisphere if the change in radiative forcing is large enough and applied long enough.

(*Climate Change 2001, Synthesis Report*)

9.6 Schlussbemerkungen und Ausblick

In dieser Vorlesung wurde versucht, einige Grundlagen der Klimamodellierung zu vermitteln. Dies erfolgte von einem numerischen Standpunkt aus, der durch einzelne Problemstellungen in der Klimaforschung illustriert wurde. Gleichzeitig wurde das Ziel verfolgt, eine Einführung in die Dynamik des Klimasystems zu geben. Sicher konnte diese Vorlesung mit dem vorliegenden Skript nur einen kleinen Einblick in dieses faszinierende Thema bieten. Es wurde hoffentlich klar gemacht, dass mehr Fragen offen sind als bereits beantwortet, und dass für gute Ideen, und kreative Modellbildung viele interessante Betätigungsfelder offen liegen. Der Rahmen von Diplom- und Doktorarbeiten bietet sich hier ideal zu einer Vertiefung an.

Die Klimamodellierung ist die einzige, wenn auch noch bei weitem nicht perfekte Methode, quantitative Aussagen über Mechanismen vergangener Klimaänderungen zu machen. Für Aussagen betreffend zukünftiger Änderungen des Klimageschehens ist die Klimamodellierung ebenfalls die einzige wissenschaftliche Basis. Eine ständige Auseinandersetzung mit beobachteten Daten und Klimavariablen, sowie ein tieferes Verständnis fundamentaler Prozesse garantiert eine kontinuierliche Verbesserung dieser Modelle. Das Ziel, die Auswirkungen des menschlichen Wirkens auf diesem Planeten wissenschaftlich abzuschätzen, und gefährliche Entwicklungen bis zu einem gewissen Mass voraussagen zu können, ist eine wichtige Aufgabe der verantwortungsbewussten Gesellschaft von heute.

Klimamodelle helfen mit, eine Strategie der Nachhaltigkeit zu entwickeln. Diese ist notwendig, denn ein stabiles Klima ist, wenn dies auch noch nicht allgemein anerkannt ist, eine wichtige Ressource für die Menschheit. Jede Veränderung einer Ressource bedeutet ein Risiko. In diesem Sinne sollten die bereits beobachteten Veränderungen als Auftrag, und gleichzeitig als Chance, zu entschlossenem Handeln aufgefasst werden.

10 Übungsaufgaben zur Klimamodellierung

Problem 1:

Calculate the sum $S = \sum_{n=1}^N n$ for $N=100$ and for $N=10,000$, first numerically, and then using the

Gauss formula $S = \frac{N \cdot (N + 1)}{2}$. Compare the two approaches.

Plot a graph of S as a function of N .

Problem 2:

Prime numbers between 2 and M can be determined using the technique of Erathostenes' sieve which goes as follows: In the vector of numbers from 1 to M , all multiples of the largest prime still in the vector are cancelled, with the exception of the prime itself. Start with 2.

Problem 3:

Calculate the hydrostatic pressure $p(z)$ of sea water as a function of depth, by integrating the hydrostatic equilibrium

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \cdot \rho(z) \quad (3.1)$$

where ρ is density and $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ is the gravitational acceleration. Density depends, in a simplified form, on temperature T and salinity S according to

$$\rho(T,S) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0) + \beta \cdot (S - S_0))$$

where $\rho_0 = 1028 \text{ kg/m}^3$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, and $S_0 = 35$, and the thermal and haline expansion coefficients are given by $\alpha = -5.3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, and $\beta = 7.9 \cdot 10^{-4}$. Temperature at a depth of 1000 m is $T = -1^\circ\text{C}$ and increases linearly to $T = 10^\circ\text{C}$ at the surface typical of high latitudes. Surface air pressure is $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Assume $S=37$.

- The first derivative in (3.1) should be discretized using the Euler forward scheme. Calculate the pressure profile and plot it against z .
- Calculate pressure by integrating (3.1). The integral can be directly calculated in Matlab. Alternatively, calculate it numerically by approximating the integral by the area of a trapezoid:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- A better approximation is obtained if the interval (a,b) is divided in many small sub-intervals in which the trapezoidal rule is applied.
- In lower latitudes temperatures vary exponentially from the surface at $T = 20^\circ\text{C}$ to $T = 5^\circ\text{C}$ at 1000 m depth with a scale depth of $d = 150 \text{ m}$. Plot $\rho(z)$ and $p(z)$.

Problem 4:

The energy balance model of the atmosphere was introduced in the lecture. The balance equation reads:

$$C \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha) \cdot \frac{S}{4} - \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (4.1)$$

Determine the equilibrium temperature for the parameter values given in section 2.2 of the lecture notes.

The ice-albedo feedback should be simulated by using the following approximation of the albedo:

$$\alpha = \begin{cases} 0.42 & \text{for } T > -10^\circ\text{C} \\ 0.62 & \text{for } T \leq -10^\circ\text{C} \end{cases}$$

In order to solve the differential equation (4.1) you use

- a) the Euler forward
- b) the Runge-Kutta scheme of 4th order

The initial value is $T = 290^\circ\text{C}$. Terminate the iteration, if the change of temperature in an iteration step is smaller than 10^{-3} K, or more than 1000 iterations are used.

Problem 5:

We now extend Problem 4 by including a simple description of the ocean surface layer. We also want to investigate the consequence of a varying solar constant, typical for a solar cycle. Consider the energy balance:

$$(C \cdot \rho \cdot h + C_{Oc} \cdot \rho_{Oc} \cdot h_{Oc}) \cdot \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha) \cdot \frac{S}{4} - \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (5.1)$$

where we use $C_{Oc} = 3900 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho_{Oc} = 1028 \text{ kgm}^{-3}$ as typical ocean values. In equation (5.1) we have assumed that the atmosphere is in instantaneous equilibrium with the ocean. For albedo use the constant $\alpha = 0.42$, and assume that the solar constant varies sinusoidally with an amplitude of about 2‰ and a period of 11 years.

Consider different depths of the surface ocean layer: 50 m, 100 m, 500 m, and 1000 m.

In order to solve the differential equation (5.1) you use

- a) the Euler forward
- b) the Runge-Kutta scheme of 4th order

Try increasing time steps from 1 month, 1 year, 3 years, 5 years to 7 years. Integrate (5.1) over several solar cycles, and produce a graph in which you show T as a function of time. Note how the temporal behaviour depends on ocean depth (phase lag).

Problem 6:

A tracer is released continuously into an aquifer in which water is flowing at a speed of $u = 1 \text{ m / day}$. We assume that this tracer is salt, whose concentration is measured in grams per kilogram water. The concentration of the tracer at the location of release raises from 0 for $t < 0$ to 100 g/kg and is held constant. Determine the time, when the tracer concentration exceeds 0.1 g/kg at a distance of 500 m from the location of release.

The problem is described by the one-dimensional advection equation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = 0 .$$

Solve this equation using

- central differences
- upwind scheme
- using a diffusive correction described in section 3.8 of the lecture notes
- what is the exact time?

Plot the numerical solutions at different subsequent times. Try different time steps.

Problem 7:

Assume now that the tracer considered in Problem 6 is tritium, the unstable isotope of hydrogen (^3H). Tritium decays radioactively (β -decay) with a half life of 12.3 years . The initial activity is 120 Bq/liter .

Determine the time, when the tracer activity first exceeds 2 Bq/liter at a distance of 500 m from the location of release.

The problem is now described by

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \lambda \cdot C = 0 .$$

Plot the numerical solutions at different subsequent times.

Problem 8:

Solve Problem 7 now with an implicit scheme as described in section 3.6.3 in the lecture notes. Use Euler forward and central differences in space. The discretized problem can be written in matrix form.

Problem 9:

Consider the one-dimensional energy balance model which was presented in the lecture notes (equation 4.9). The energy balance now reads:

$$C \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = (1 - \alpha) \cdot \frac{S(\varphi)}{4} - \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 + \frac{C \cdot \rho \cdot h}{R^2 \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad (5.1)$$

where the latitudinally dependent eddy diffusivity K (in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) and the albedo α are given by

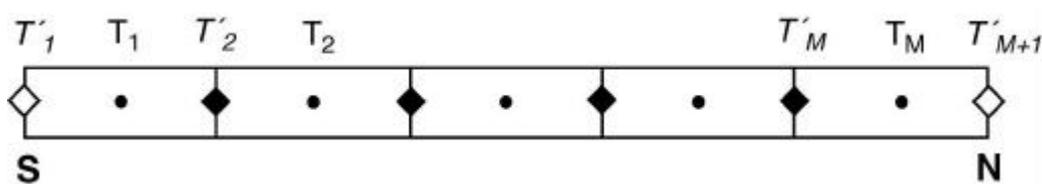
$$K(\varphi) = (1.5 + 2.5 \cdot \cos \varphi) \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$\alpha(\varphi) = 0.6 - 0.4 \cdot \cos \varphi.$$

$$S(\varphi) \approx S_0 \cdot (0.5294 + 0.706 \cdot (\cos \varphi)^2).$$

The values of the other parameters are given in section 2.2 of the lecture notes; S_0 is the solar constant.

Define a grid where the temperatures are given at the centres of the grid boxes, and the first derivatives $\partial T / \partial \varphi$ are given at the box edges, as in the figure below.



The temperatures are evaluated at the points, the derivatives at the diamonds. The boundary conditions are imposed at the open diamonds. The discretized first derivative is given by

$$T'_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta \varphi}, \quad \text{the second derivative is evaluated at the points, and given by } T''_i = \frac{T'_{i+1} - T'_i}{\Delta \varphi}.$$

- Calculate the steady-state temperature as a function of latitude. Choose 1° as the meridional resolution, and Euler forward for the time discretization with $\Delta t = 20 \text{ min}$. Note that you need at least 10,000 iterations for convergence.
- Compare the temperature with that obtained for $K = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- At which positions in the latitudinal grid should K be given, such that the finite difference scheme is 2nd order in space?
- Compare the result with the surface air temperature data set available under www.climate.unibe.ch/stocker/EKlima/matlab/prob9_sat.dat

Problem 10:

The first model of the wind-driven large-scale circulation in a closed basin was proposed by Henry Stommel as introduced in section 6.4 of the lecture notes.

The streamfunction Ψ satisfies the following partial differential equation (PDE)

$$\beta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - R \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right),$$

and $\Psi = 0$ on the boundary. The PDE should be solved in a rectangular domain of zonal extent of $L = 7000$ km, and $B = 5000$ km meridional extent. The circulation is driven by a zonal wind stress for which we assume a simple profile, as in the lecture notes,

$$\tau_{xz} = -T \cdot \cos\left(\frac{\pi}{B} \cdot y\right), \quad \tau_{yz} = 0,$$

with $T = 0.1 \text{ Nm}^2$. We select $\beta = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, and $R = 1/(6 \text{ days})$.

- Discretize the PDE using central differences. Use successive overrelaxation (SOR) to calculate the streamfunction. The iteration can be terminated when the maximum relative error is smaller than 10^{-6} , i.e., $\max(\zeta_{i,j} / (e_{i,j} \cdot \Psi_{i,j})) < 10^{-6}$ (see lecture notes section 5.4).
- Determine the optimum relaxation parameter ω , by plotting the number of iterations as a function of ω .
- Make a contour plot of the streamfunction.
- Plot the streamfunction $\Psi(x, y = B/2)$ for three values of the friction: $R=1/(2 \text{ days})$, $1/(6 \text{ days})$, $1/(20 \text{ days})$. Note that your discretisation might not be appropriate to represent a very narrow boundary current whose width scales as R/β .

Problem 11:

The Lorenz model is a simple, but powerful model for flow in the atmosphere. It is the basis of chaos theory and was first described by Ed Lorenz in his landmark paper entitled Deterministic non-periodic flow, which appeared in 1963 (Lorenz, 1963, *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 130). The equations of this famous model were actually derived by Barry Saltzman and read

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma \cdot X + \sigma \cdot Y , \\ \frac{dY}{dt} &= -X \cdot Z + r \cdot X - Y , \\ \frac{dZ}{dt} &= X \cdot Y - b \cdot Z .\end{aligned}$$

All quantities are dimensionless. These equations describe the largest-scale planetary waves and their interactions in the atmosphere. The physical meaning of X, Y, and Z, and the derivation are given in the lecture notes.

Calculate the solution of the Lorenz model using the 4th order Runge-Kutta scheme (see section 2.3 in the lecture notes) with a time step of $\Delta t = 12/2000$. Use the following parameters: $r = 28$, $\sigma = 10$, and $b = 8/3$. Calculate the solution for two slightly different initial conditions:

1. $X_1(0) = 1$, $Y_1(0) = 2$, $Z_1(0) = 11.01$
2. $X_2(0) = 1$, $Y_2(0) = 2$, $Z_2(0) = 11.02$

- a) Plot the first 10,000 time steps in the Y-Z plane.
- b) Plot the distance between the solutions starting from the two initial conditions as a function of time. The distance is defined as

$$d(t) = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$$

Problem 12:

The predictability of atmospheric flow depends on the current state of the atmosphere. Predictability can be determined by integrating an ensemble of initial conditions that are within certain predefined bounds.

We now use the Lorenz model to calculate ensembles from initial conditions at $t = 0$ which are located in circles of radius 0.5 in the Y-Z plane, centered at the three locations:

$$(X_1 \ Y_1 \ Z_1) = (1 \ 2 \ 42); \quad (X_2 \ Y_2 \ Z_2) = (1 \ 2 \ 9); \quad (X_3 \ Y_3 \ Z_3) = (1 \ -1 \ 11).$$

Follow how the circles deform as time progresses. Consider the time interval from $t = 0$ to $t = 0.5$, which corresponds to about 5 days.